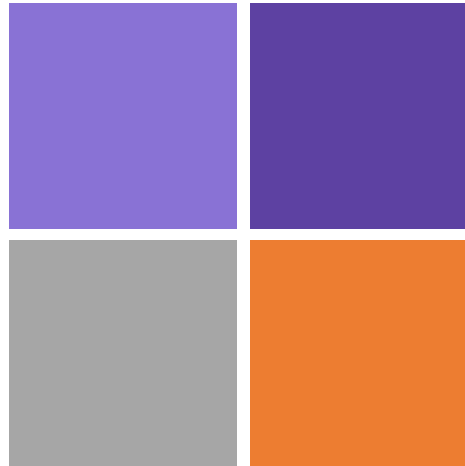


# Semaine 5

## Torsion partie I



### **Partie I:**

1. Introduction à la Torsion

### **Partie II:**

1. Loi de Hooke en Torsion
2. Contraintes et déformations relatives en torsion pour une barre circulaire

### **Partie III:**

1. Torsion non uniforme
2. Puissance par un arbre de transmission
3. Torsion de barres non-circulaires
4. Énergie de déformation relative en torsion
5. Résumé

**L'évaluation indicative de l'enseignement est ouverte**

# Programme du cours

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
<b>Danick Briand</b>				
1	09.09	1. Intro des <b>3 enseignants</b> 2. Rappel bases statique et diagramme des forces	x	
1	11.09	Contraintes 1D	x	Série 1
2	16.09	Contraintes	x	Série 1
2	18.09	Contraintes	x	Série 2
3	23.09	Déformation	x	Série 2
3	25.09	Déformation	x	Série 3
4	30.09	Transformation	x	Série 3
4	02.10	Transformation	x	Série 4
5	07.10	Torsion	x	Série 4
5	09.10	Torsion	x	Série 5
<b>Dimitrios Karampinos</b>				
6	14.10	Forces internes, contrainte normale en flexion	x	
6	16.10	Composite axe neutre	x	Série 6
7	28.10	Cisaillement et poutre flèche	x	Série 6

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semestre D. Briand		
8	06.11	Poutre flèche suite	x	Série 7
9	11.11	Guidage flexible	x	Série 7
9	13.11	Systèmes indéterminés et thermiques	x	Série 8
10	18.11	Systèmes indéterminés et Flambage	x	Séries 8-9
10	20.11	Flambage	x	Série 9
<b>Simon Henein</b>				
11	25.11	Ressorts	x	Série 10
11	27.11	Guidages flexibles	x	Série 11
12	02.12	Guidages flexibles	x	Série 11
12	04.12	Guidages flexibles	x	Série 11
13	09.12	Transmissions	x	Série 12
13	11.12	Transmissions	x	Série 12
14	16.12	Engrenages	x	Série 13
14	18.12	Accouplements	x	Série 14

## Jeudi 30.10

09h15 à 11h: Quiz avec des questions données sur grand écran  
 11h15 à 13h: Session d'exercices avec questions bienvenues sur toutes les séries

# Examen mi-semestre

## Instructions générales

1/3 de la note finale

3

Sur Moodle  
avec  
**Examens blancs**

- Date: Mardi 4 Novembre de 9h45 à 11h15 (1h30) / Portes à 9h30
- Salles: CM 1 1, CE 1 515
- Sujets couverts: Semaines 1 à 5 incluses
- **(exercices + exemples à maîtriser)**
- Feuille de formules: 1 feuille recto-verso / 2 pages écrites à la main
- Matériel nécessaire: stylo (ni rouge ni vert), crayon et règle

CAMIPRO / Calculatrice sans accès à internet

- **Dans vos réponses, svp essayer de fournir le plus d'informations possible:**
  - Dessiner les diagrammes pertinents
  - Ecrire les informations fournies
  - Ecrire ce qui est demandé
  - Quels sont les principes utilisés
  - Quelles équations s'appliquent
  - Effectuer les calculs sous forme symbolique
  - Effectuer les calculs numériques lorsque nécessaires
  - Donner une réponse claire

# Examen mi-semestre

## Instructions pour l'examen

---

### ■ Avant que l'examen commence:

- Regarder le plan des salles
- Trouver votre place dans la salle: un examen avec votre nom vous y attend

### **Ne pas tourner la page couverture avant qu'on vous le dise**

- Placer votre carte Camipro devant vous sur la table
- Téléphones portables éteints et dans votre sac
- Préparer votre place de travail. Matériel autorisé:
  - Stylos, **vert et rouge sont réservés pour la correction**
  - Crayons autorisés seulement pour les dessins
  - Calculatrice simple (les mémoires seront contrôlées)

# Examen mi-semestre

## Instructions pour l'examen

---

### ■ Pendant l'examen:

- **Mettre votre nom et le numéro de page sur toutes vos feuilles de réponses.**
- Faites attention à votre écriture. Tout matériel illisible ne sera pas corrigé
- Du papier supplémentaire est disponible
- Lever votre main si vous avez une question ou si vous voulez aller aux toilettes, ou si vous avez terminé votre examen
- A partir de 15 minutes avant la fin de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- **Quand l'examen est terminé, déposer votre crayon, rester assis et silencieux jusqu'à toutes les copies aient été ramassées.**

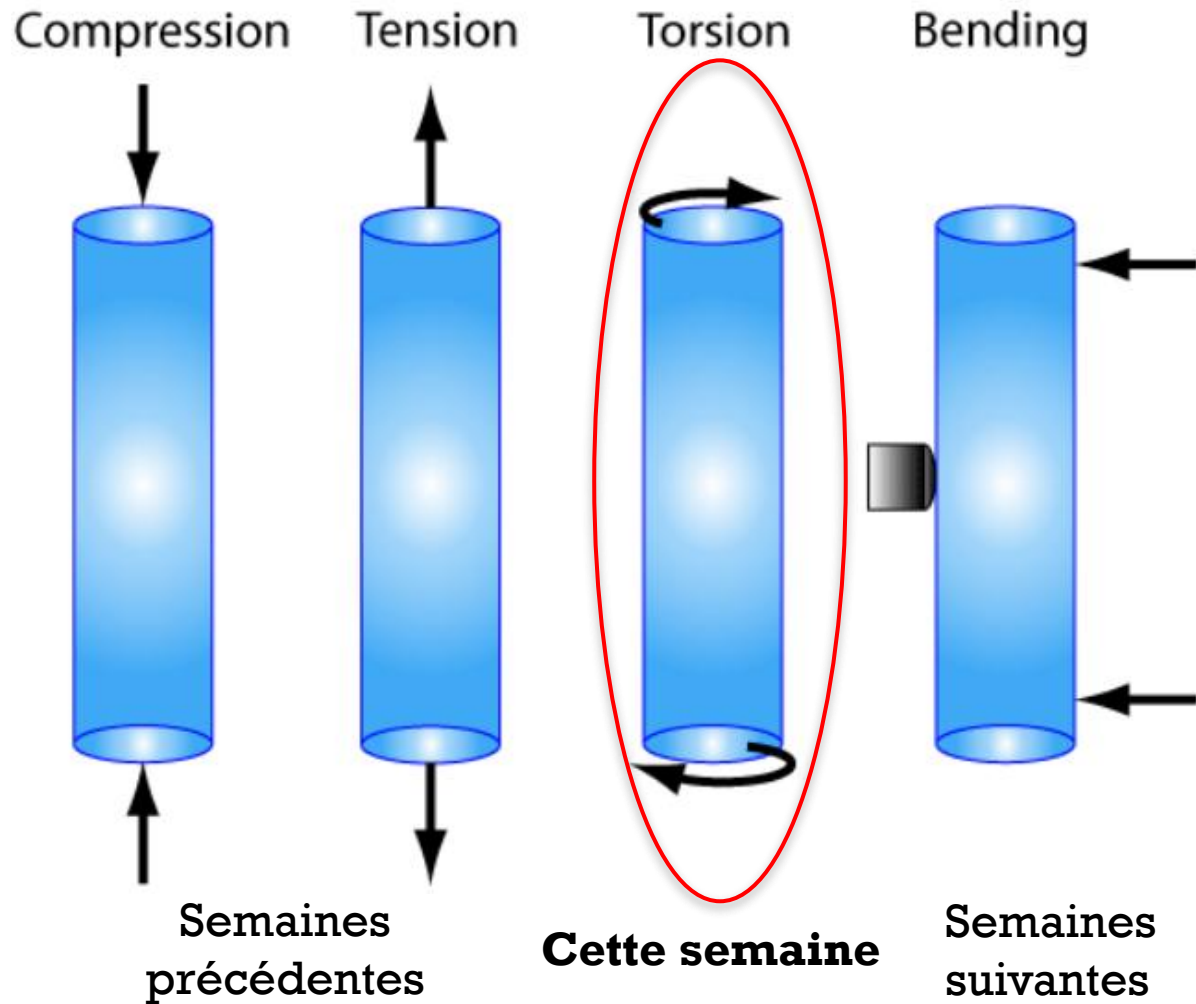
# Questions ?

## Quiz Session: micro200



- Durant les séances d'exercices en classe
- Par courriel: [danick.briand@epfl.ch](mailto:danick.briand@epfl.ch)

# Semaine 5: Torsion

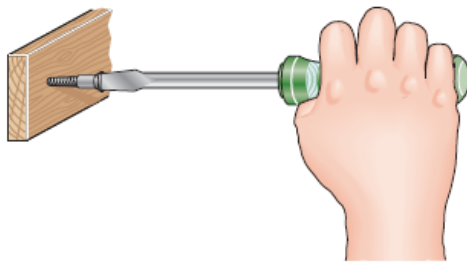


## **Torsion** **Contraintes et déformations relatives** **en cisaillement / angle de rotation**

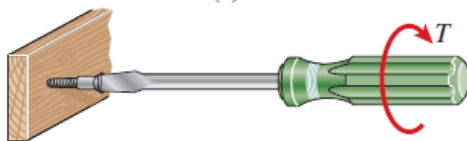
### ■ **Semaine 5**

- Comprendre ce qu'est un couple et sa représentation graphique
- Relier contraintes et déformations relatives en cisaillement via la loi de Hooke
- Moment quadratique de torsion et son calcul pour différentes géométries
- Calculer l'angle de torsion d'une barre lorsque qu'un couple est appliqué

- La torsion dans ce cours adresse principalement des barres circulaires et arbres creux suivant l'application de moments de torsion
- Nous allons considérer de la torsion **uniforme** et **non uniforme**:
  - Uniforme: Le couple est constant le long d'une barre prismatique
  - Non uniforme: Le moment de torsion et/ou la rigidité en torsion de la section transversale varient sur la longueur de la barre



(a)

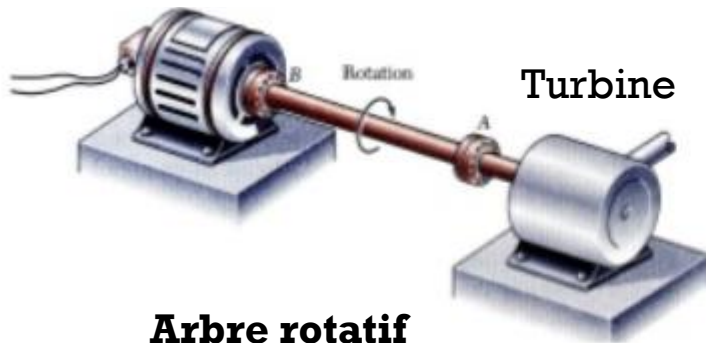


(b)

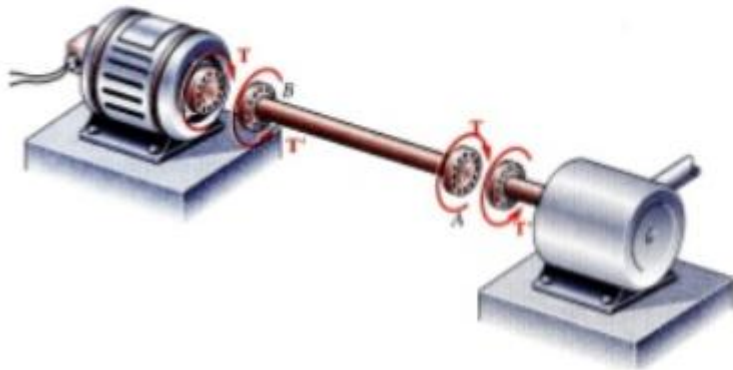


## ■ Où cela se produit-il ?

Générateur



**Arbre rotatif**

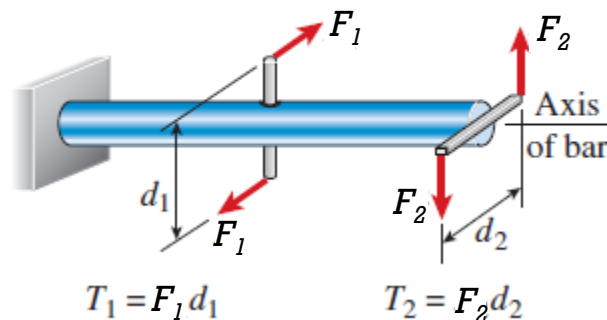


Notamment dans des arbres rotatifs soumis à des couples (Torques)

- Turbine exerçant un couple  $T$  sur l'arbre
- L'arbre transmettant ce couple à un générateur

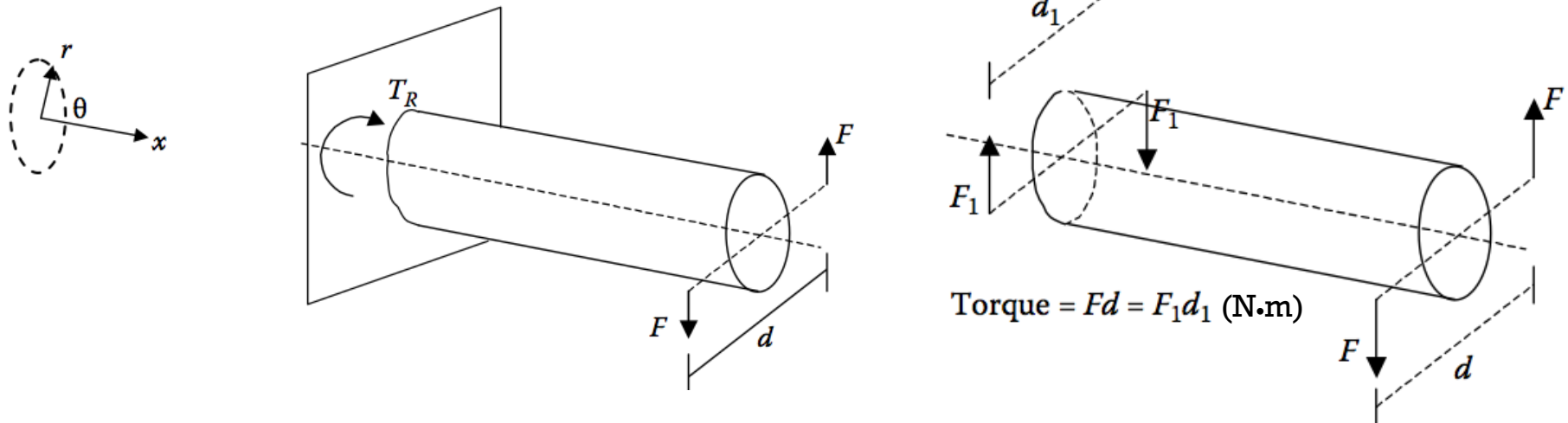
- **Définition:** La Torsion réfère à la sollicitation d'une barre droite lorsque chargée par un/des couples de forces opposées qui tendent à produire une rotation selon l'axe longitudinal de la barre.
- Un cas original de charge de torsion: **Barre droite avec un support à une extrémité et chargée par 2 paires de forces égales et opposées.**

Barre circulaire soumise à la Torsion par des couples  $T_1$  et  $T_2$



Couples de force  $T_1$  et  $T_2$

- Quand une structure est soumise par **une paire de couples**, ou un **couple simple lorsque fixée**, la structure est alors en **torsion**.
- *Couple*: une paire de forces égales et parallèles qui agit dans la direction opposée et tend à produire une rotation (avec un moment résultant mais pas de force résultante)



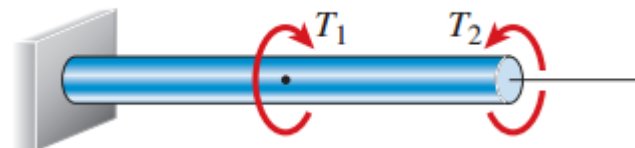
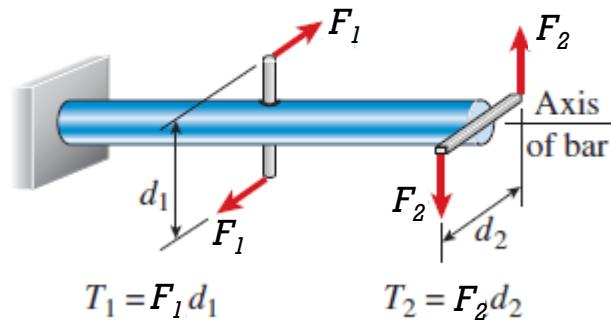
Le couple (Torque) est égal au produit de l'une des forces et la distance perpendiculaire entre les lignes d'action de ces forces

# Représentation d'un couple

## Flèche circulaire

- Flèche circulaire agissant dans la direction de rotation

Barre circulaire soumise à la  
Torsion par des couples  $T_1$  et  $T_2$

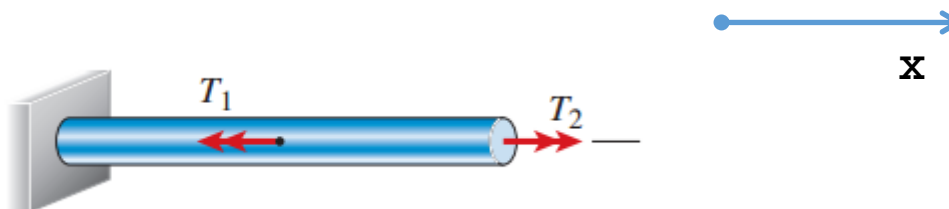
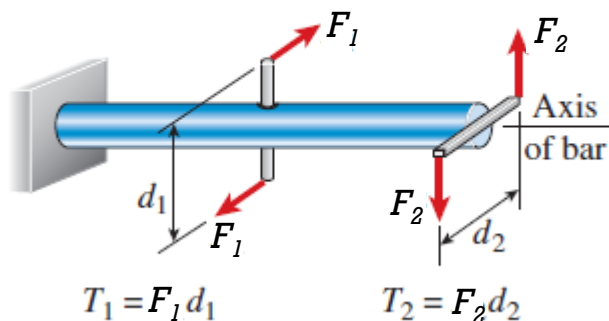


# Représentation d'un couple

## Vecteur

- Vecteur de la forme d'une flèche avec deux pointes

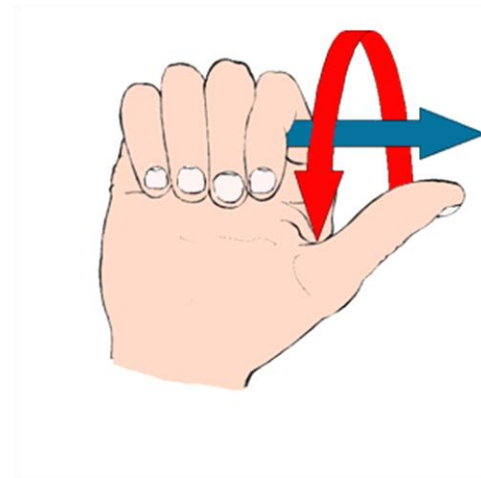
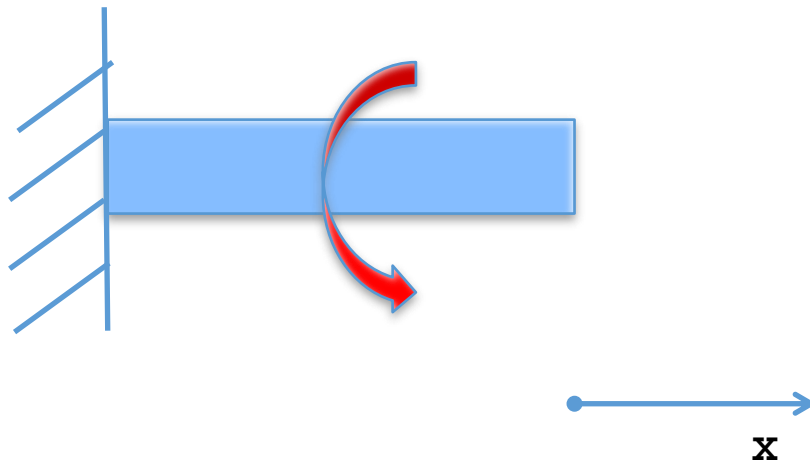
Barre circulaire soumise à la  
Torsion par des couples  $T_1$  et  $T_2$



# Représentation d'un couple

## Convention des signes

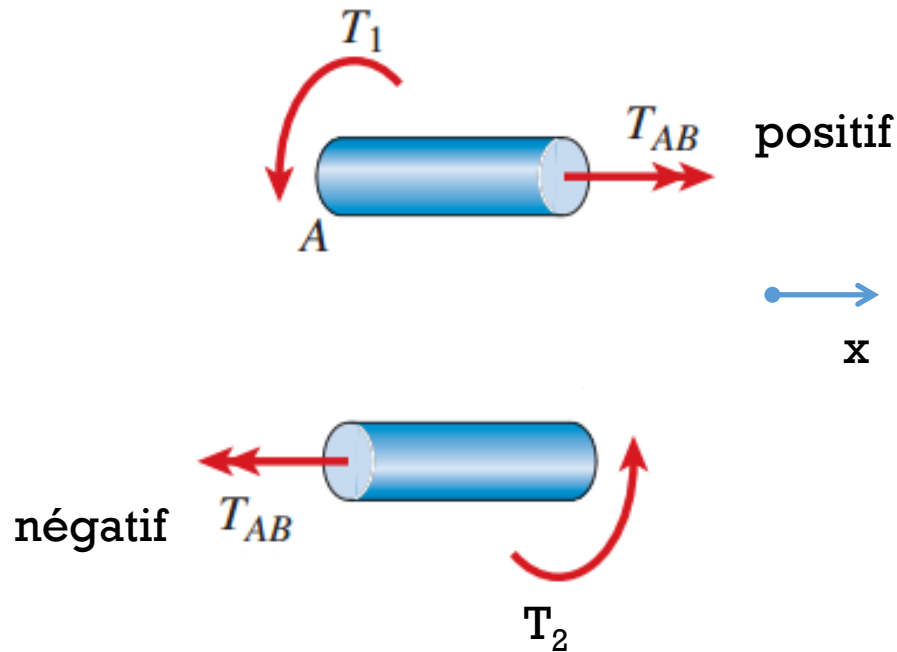
- Placer votre pouce le long de la direction positive de l'axe
- Fermer votre main
- Cela donne le signe positif (sens antihoraire)



# Couple interne

## Convention des signes

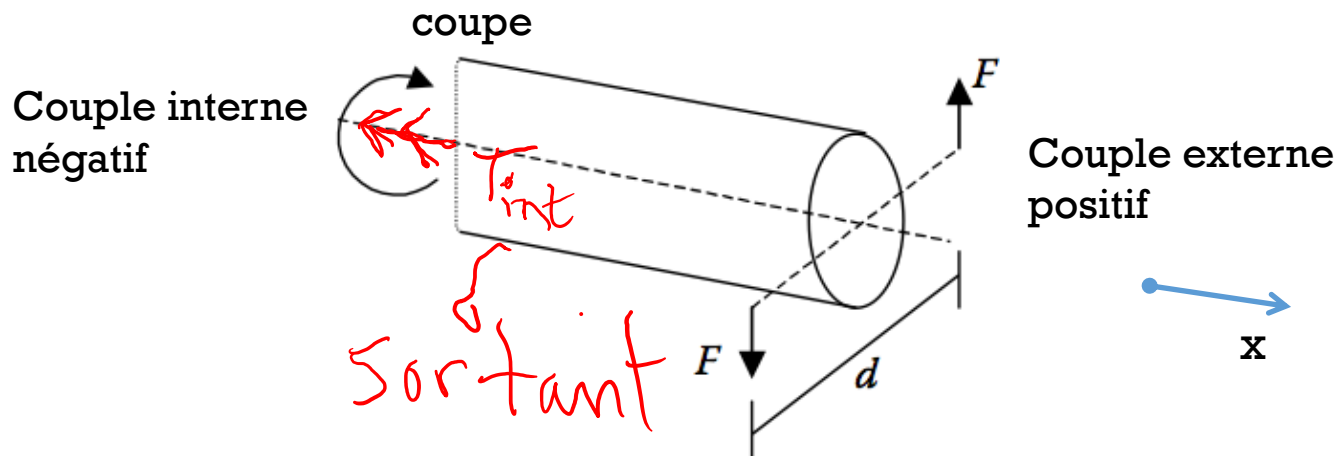
- En appliquant la méthode des sections, le couple interne,  $T_{\text{int}}$ , doit pointer dans la direction du vecteur normal du plan coupé.



- L'équation d'équilibre dans ce cas (avec une rotation autour de l'axe  $x$ ):

$$\sum M_x = 0$$

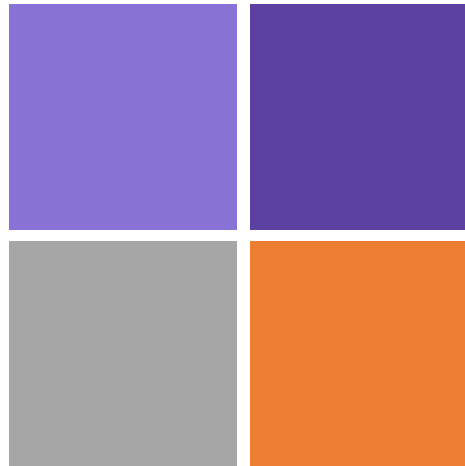
- En utilisant la méthode des sections, nous voyons qu'un couple interne est nécessaire pour maintenir l'équilibre avec le couple externe.
- Ce couple interne doit être opposé et égal au couple externe.



# Semaine 5

## Torsion partie II

19



### Partie I:

1. Introduction à la Torsion

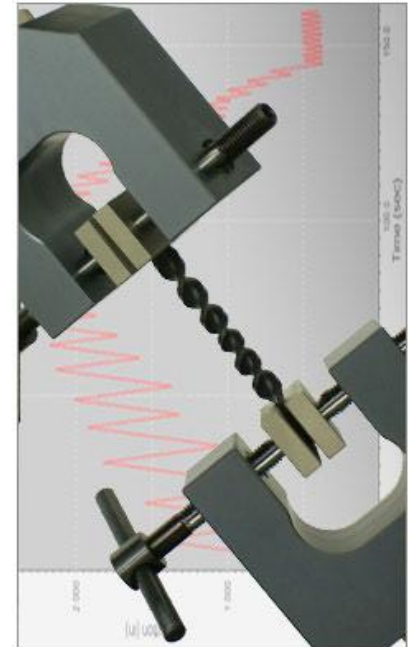
### Partie II:

1. Loi de Hooke en Torsion
2. Contraintes et déformations relatives en torsion pour une barre circulaire

### Partie III:

1. Torsion non uniforme
2. Puissance par un arbre de transmission
3. Torsion de barres non-circulaires
4. Énergie de déformation relative en torsion
5. Résumé

- La **Torsion** ne cause pas de tension ou compression dans le matériau: elle **génère des contraintes de cisaillement pures sur chaque plan de section transversal**.
- Le **résultat de la contrainte de cisaillement en torsion** sur n'importe quel plan de section transversale **est un couple interne**.



ADMET


- Nous voulons relier contrainte et déformation relative et aussi la charge appliquée et la déformation
- Pour la Torsion et un matériau élastique et linéaire, rappelons-nous la loi de Hooke pour le cisaillement:

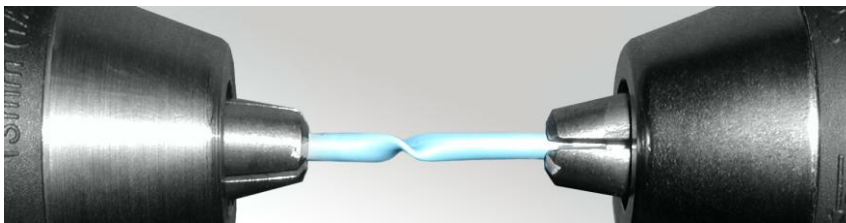
**Les contraintes de cisaillement,  $\tau$ , sont proportionnelles aux déformations relatives,  $\gamma$ , avec une constante de proportionnalité,  $G$ , le module de cisaillement**

$$\tau = G \cdot \gamma$$

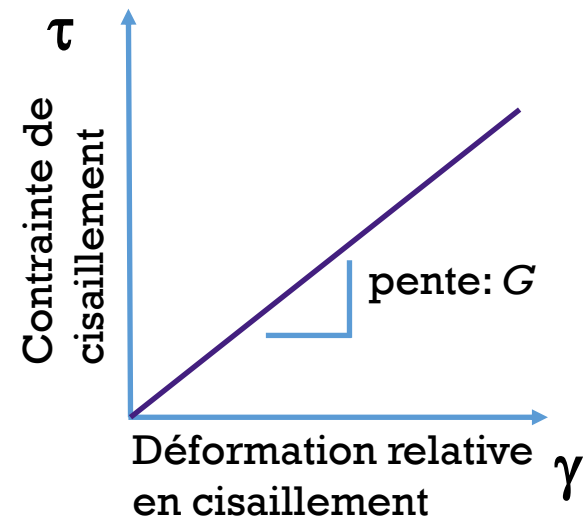
# Loi de Hooke en Torsion

## Module de cisaillement

- Cette forme de la loi de Hooke permet de déterminer aisément le module de cisaillement,  $G$ , d'un matériau lors d'un test expérimental.
- En appliquant un couple sur un échantillon de test cylindrique et en mesurant l'angle de torsion  $\phi$  
- $G$  peut être calculé de la pente des mesures expérimentales.



Instrument Instron



# Contraintes et Déformations relatives en Torsion

- Une section plane perpendiculaire à l'axe de Torsion reste plane suite à l'application du couple (pas de distorsion)
- Sur une section transversale, toutes les lignes radiales effectuent une rotation avec un angle égal lors de la déformation
- La déformation relative de cisaillement  $\gamma(r)$  et la contrainte de cisaillement  $\tau(r)$  varient linéairement, de 0 à  $r=0$ , à  $\gamma_{\max}$  et  $\tau_{\max}$ , respectivement, sur le bord extérieur de la section



section transversale

# Déformation relative en Torsion

Angle de torsion et déformation relative de cisaillement

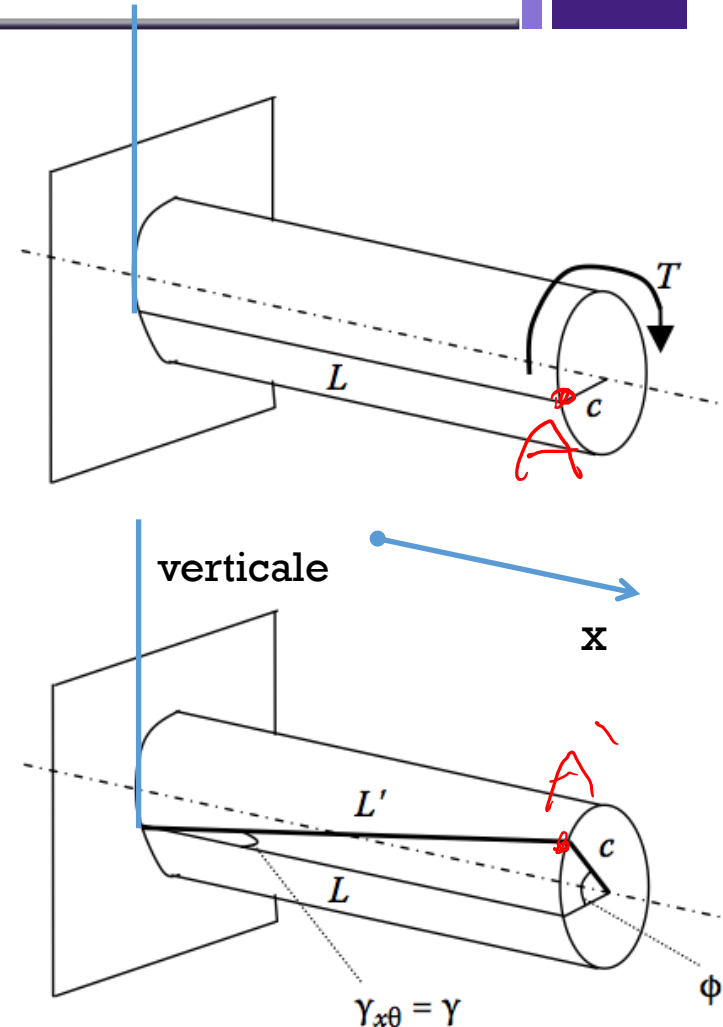
- Définissons la déformation relative de cisaillement géométrique pour un cylindre solide avec un bout fixé.
- La **déformation relative de cisaillement à l'extérieur du cylindre correspond au changement de l'angle initial (droit) entre la ligne L et la verticale.**

$$\gamma_{max} = \frac{\phi c}{L} \quad \gamma(r) = \frac{\phi r}{L}$$

$\Phi$  et  $\gamma$  sont en radians

c: Rayon de la barre

$\phi$ : Angle de torsion, positif dans le sens antihoraire

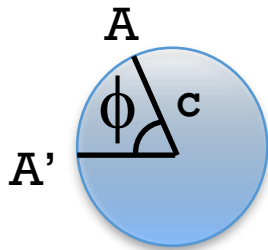


# Déformation relative en Torsion

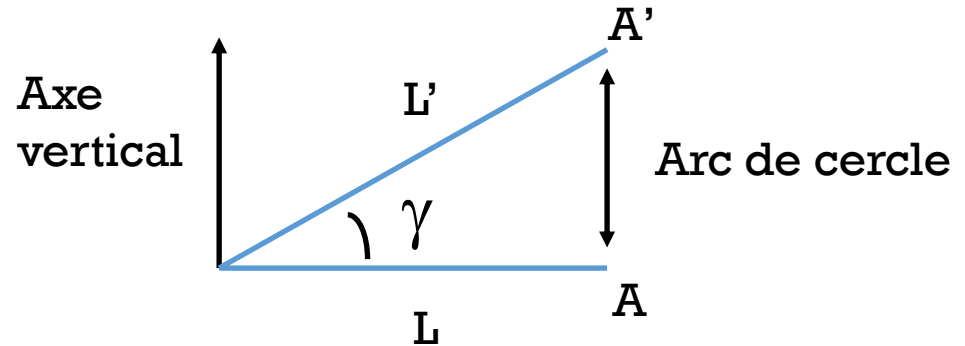
## Angle de torsion et déformation relative de cisaillement

- Définissons la déformation relative de cisaillement géométrique pour un cylindre solide avec un bout fixé.

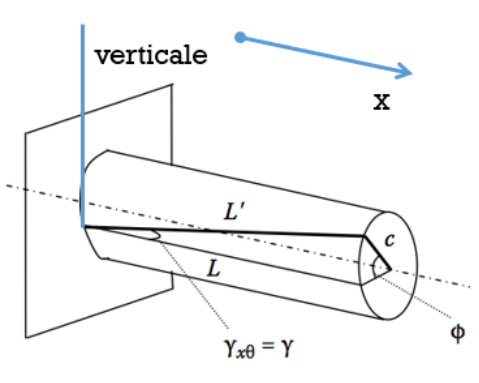
Section à l'extrémité



$$\text{Arc de cercle} = \phi c$$



$$\text{Arc de cercle} = L \tan \gamma = L \gamma$$



$$\Rightarrow \phi c = L \gamma$$

$$\gamma_{max} = \frac{\phi c}{L} \quad \gamma(r) = \frac{\phi r}{L}$$

Φ et γ sont en radians

# Contraintes de cisaillement en Torsion

## Relier déformation relative et contrainte de cisaillement

- Nous avons considéré que:
  - $\gamma$  varie linéairement avec  $r$
  - une ligne droite sur un plan qui est parallèle au plan à l'extrémité de la barre restera une ligne droite

$$\gamma(r) = \frac{r}{c} \gamma_{max} \quad \gamma(r): \text{déformation relative}$$

- Nous pouvons donc écrire la **loi de Hooke en Torsion**:

$$\tau(r) = G \frac{r}{c} \gamma_{max} = \frac{r}{c} \tau_{max} \quad \tau(r): \text{contrainte de cisaillement}$$

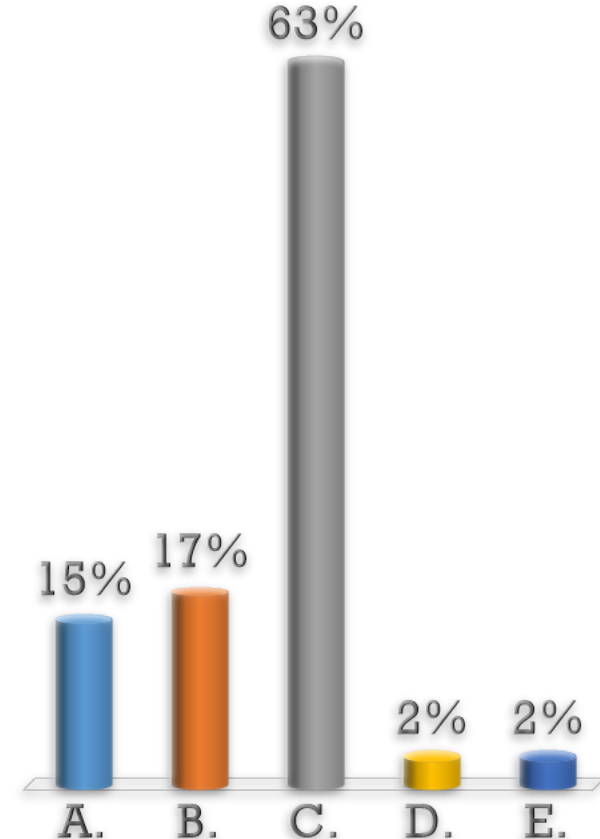
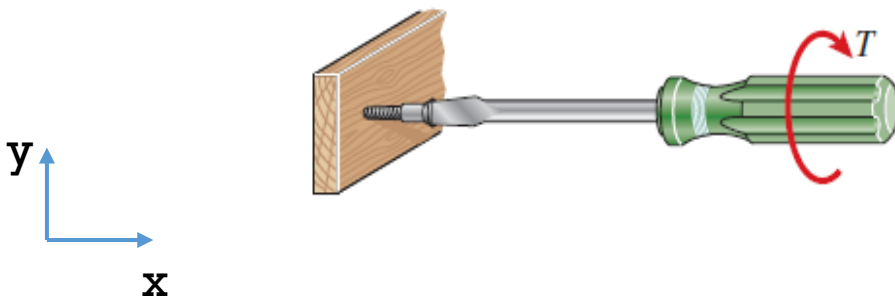
$c$ : rayon de la barre

# Contraintes de cisaillement maximale ?

Visse considérée comme un cylindre prismatique avec  $D = 8\text{mm}$ ,  $L = 10\text{cm}$ , et  $G = 190\text{ GPa}$ . L'angle de torsion sur la visse est de  $-0.4^\circ$ .

Quelle est la contrainte de cisaillement maximale dans la visse ?

- A. - 106 MPa
- B. - 3.04 GPa
- C. - 53 MPa
- D. - 663 MPa
- E. - 26.5 MPa



# Contraintes de cisaillement maximale ?

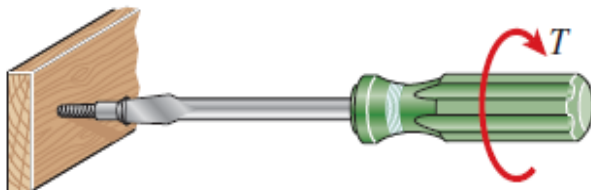
Visse considérée comme un cylindre prismatique avec  $D = 8\text{mm}$ ,  $L = 10\text{cm}$ , et  $G = 190\text{ GPa}$ . Angle de torsion sur la visse est de  $-0.4^\circ$ .

Quelle est la contrainte de cisaillement maximale dans la visse ?

$$\tau = G\gamma \quad \gamma_{max} = \frac{\phi c}{L} \quad \tau_{max} = G\gamma_{max} = G \frac{\phi c}{L}$$

*r = c max*

$$\tau_{max} = \left( 190 * 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \frac{\left( -0.4 * \frac{\pi}{180} \text{ radians} \right) \left( \frac{0.008}{2} \text{ m} \right)}{0.1 \text{ m}} = \approx -53 \text{ MPa}$$



# Contraintes de cisaillement en Torsion

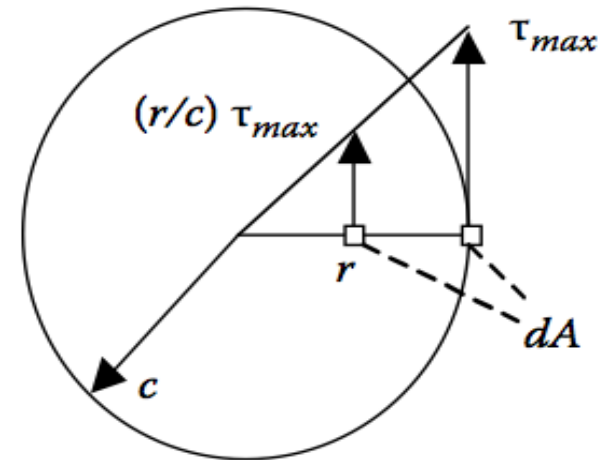
**La formule de Torsion:** contrainte de cisaillement vs. couple

- Visualisation de la distribution de la contrainte de cisaillement sur la section transversale circulaire:
- **Rappel:** La contrainte est liée à l'intensité des forces internes (par unité d'aire)
- Assumons une aire infinitésimale  $dA$ , la force interne agissant sur cette aire  $dA$  est:

$$F_{dA} = \tau(r)dA = \frac{r}{c}\tau_{max}dA$$

- Cette condition d'équilibre doit être satisfaite:

$$\sum M_x = 0 = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$



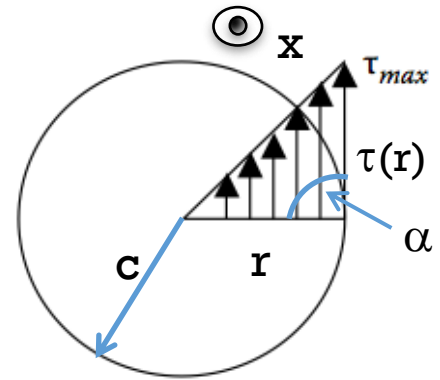
# Contrainte de cisaillement en Torsion

*La formule de Torsion: contrainte de cisaillement vs. couple*

- Le moment interne doit assurer l'équilibre avec le couple externe T:

$$\begin{aligned}\vec{T}_{int} &= \vec{r} \times \vec{F} = Fr \sin \alpha \\ &= \int_A \underbrace{\frac{r}{c} \tau_{max} dA}_{\text{Force}} \cdot \underbrace{r}_{\text{moment arm}} \cdot \underbrace{\sin \alpha}_{\alpha=90^\circ} \\ &= \frac{\tau_{max}}{c} \underbrace{\int_A r^2 dA}_{I_p}\end{aligned}$$

entre r et  $\tau(r)$



Méthode des sections

- $I_p$  est le moment quadratique de Torsion et ne dépend que de la section transversale.

La formule de Torsion est:

$$\begin{aligned}\tau_{max} &= \frac{Tc}{I_p} \\ \tau(r) &= \frac{Tr}{I_p}\end{aligned}$$

**! T est toujours le couple interne !**

# Contraintes de cisaillement en Torsion

## Formule de Torsion pour un arbre circulaire

- Pour un arbre circulaire:  $dA = 2\pi r dr$

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^c 2\pi r^3 dr = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^c = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\tau(r) = \frac{Tr}{I_p} \quad \Rightarrow \quad \tau(r) = 32 \frac{Tr}{\pi d^4}$$

**!  $I_p$  est le moment quadratique de Torsion !**

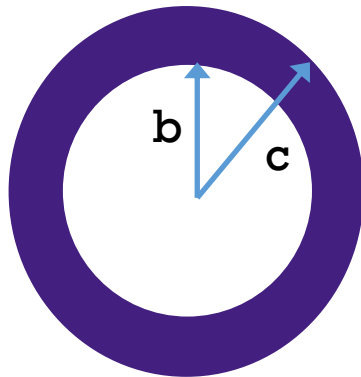
# Contraintes de cisaillement en Torsion

Pour un tube à paroi mince

- Pour un tube à paroi mince, le moment quadratique de torsion est:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_b^c 2\pi r^3 dr = \frac{\pi c^4}{2} - \frac{\pi b^4}{2}$$

*I p plein*  
*- I p vide*



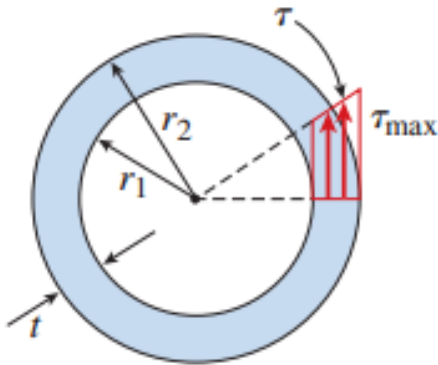
Pour une paroi très mince d'épaisseur  $t$  et  $b \approx c$

$$I_p \approx 2\pi r_{\text{ave}}^3 t \quad \tau = \frac{Tr}{I_p} \approx \frac{T}{2\pi r_{\text{ave}}^2 t}$$

avec

$$t = (c - b)$$

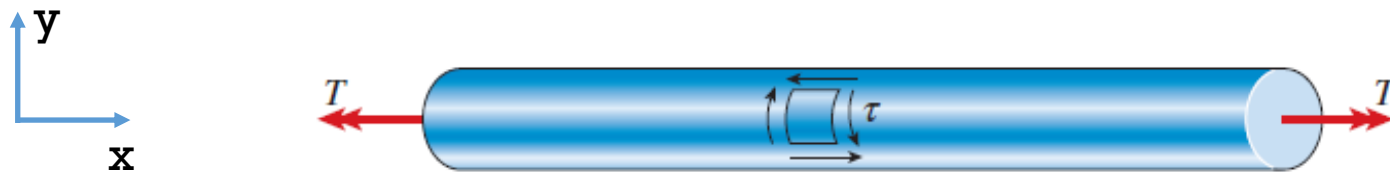
$$r_{\text{ave}} = \frac{b + c}{2}$$



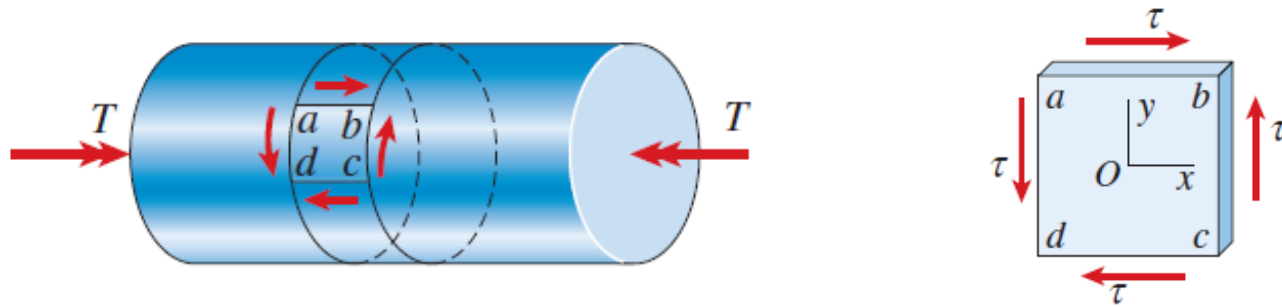
# Contraintes de cisaillement en Torsion

## Distribution sur la paroi

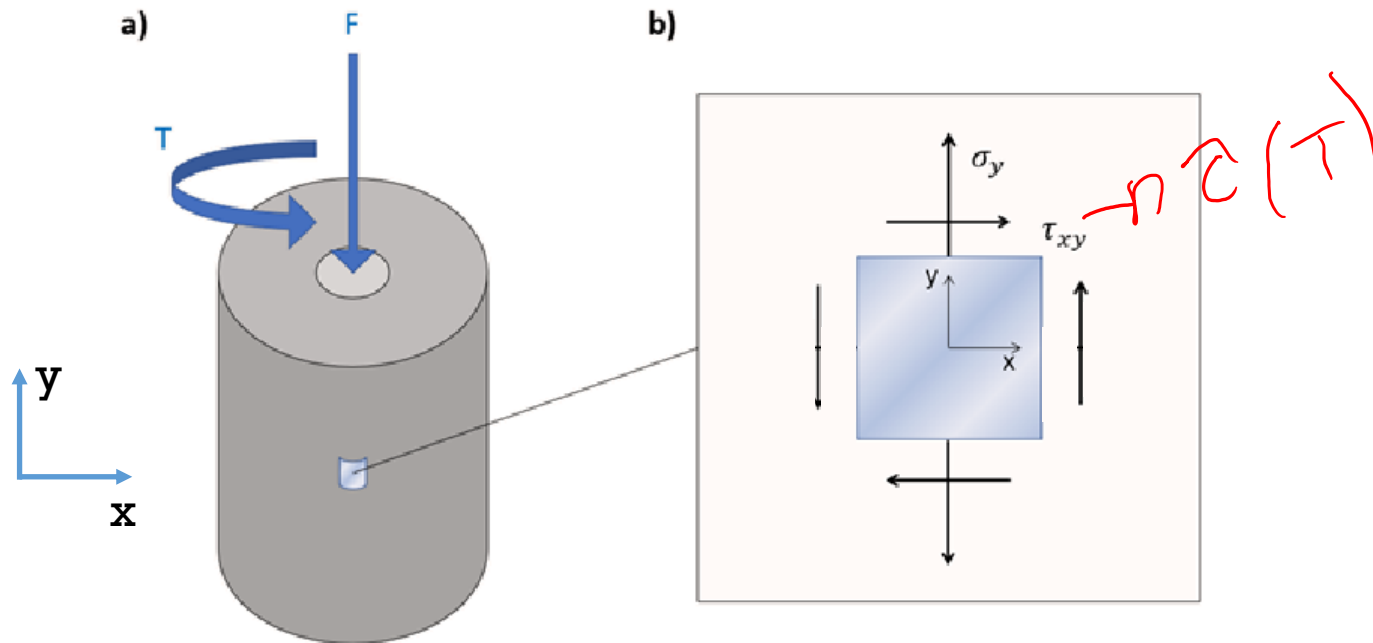
- Contraintes agissant sur une barre cylindrique en Torsion



## Contraintes de cisaillement pures



- Avec une force axiale appliquée, les contraintes maximales doivent être déterminées à l'aide des formules de transformation



$$\sigma_{Max/min} = \frac{\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{Max/min} = \pm \sqrt{\left(\frac{-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

*Torsion*

# Loi de Hooke en Torsion

Relation entre couple et angle de torsion

- De la loi d'Hooke nous avons:  $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$
- De la formule de torsion nous avons:  $\tau_{max} = \frac{Tc}{I_p}$
- De la déformation relative nous avons:  $\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$

En égalisant ces expressions pour la déformation relative maximale:

$$\frac{\tau_{max}}{G} = \frac{c\phi}{L} = \frac{Tc}{GI_p} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GI_p}} \quad (\phi \text{ positif dans le sens antihoraire})$$

**Rigidité en Torsion:**  $k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{GI_p}{L}$

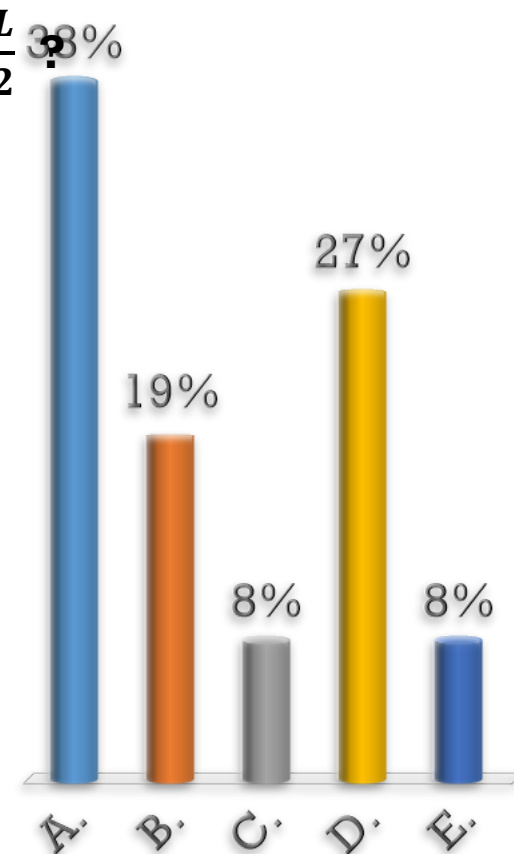
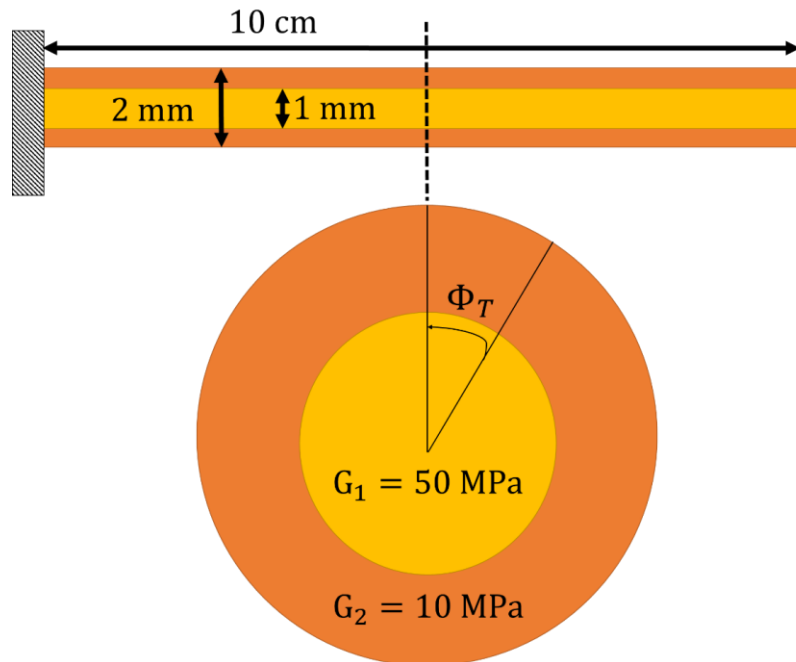
! T est toujours T interne !

# Contrainte de cisaillement maximale ?

Barre concentrique composée de 2 matériaux avec un module de cisaillement différent. Un couple est appliqué à l'extrémité avec à  $\frac{L}{2}$ ,  $\Phi_T = 1$  rad.

Quelle est la contrainte de cisaillement maximale à  $\frac{L}{2}$  ?

- A. 0.50 MPa
- B. 1.0 MPa
- C. 0.10 MPa
- D. 0.20 MPa
- E. 0.60 MPa

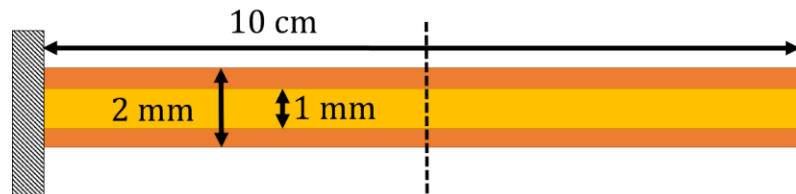


# Contrainte de cisaillement maximale ?

Barre concentrique composée de 2 matériaux avec un module de cisaillement différent. Un couple est appliqué à l'extrémité avec à  $\frac{L}{2}$ ,  $\Phi_T = 1$  rad.

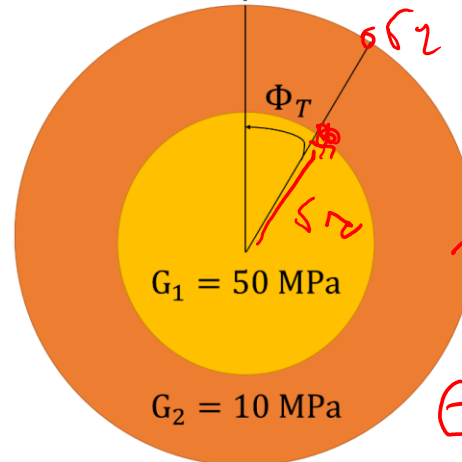
**Quelle est la contrainte de cisaillement maximale à  $\frac{L}{2}$  ?**

$$\tau(r) = G \frac{\Phi r}{L}$$



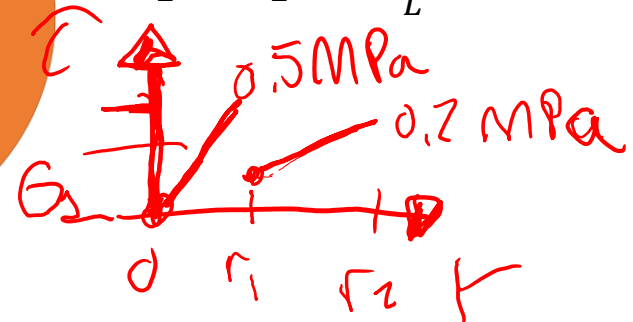
A l'extérieur du tube 1

$$\tau_1 = G_1 * \frac{2(\Phi_T * r_1)}{L} = 0.5 \text{ MPa}$$



A l'extérieur du tube 2

$$\tau_2 = G_2 * \frac{2(\Phi_T * r_2)}{L} = 0.2 \text{ MPa}$$



# Exemple 5.1:

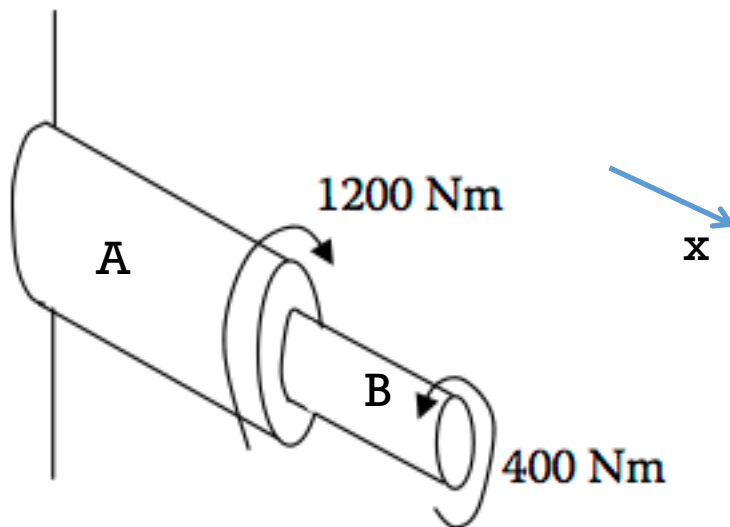
## Arbre composite

- Deux arbres pleins circulaires ( $G = 28 \text{ GPa}$ )  $A$  et  $B$  sont joints mécaniquement et soumis à 2 couples.

*Section A:* diamètre = 40 mm et  $L = 160 \text{ mm}$

*Section B:* diamètre = 20 mm et  $L = 120 \text{ mm}$

- Trouver (a) la contrainte de cisaillement maximale dans les sections  $A$  et  $B$ ; (b) l'angle de torsion à l'extrémité droite du segment  $B$ .



# Exemple 5.1

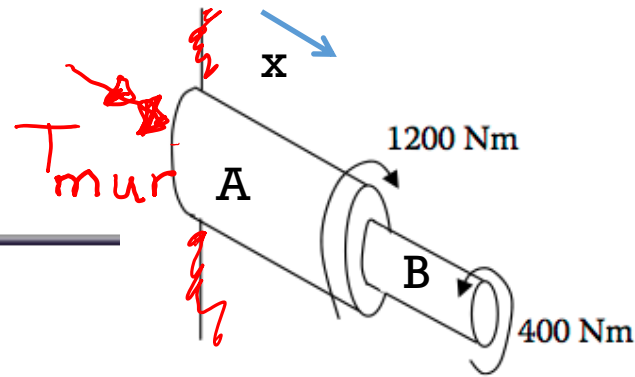
## Arbre composite

- Données: Dimensions et propriétés de l'arbre
- Postulat : Loi de Hooke applicable
- Demandés: - La contrainte de cisaillement maximale dans chaque segment  
- Angle de rotation à l'extrémité droite
- Équations requises:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{I_p} \quad \phi = \frac{TL}{GI_p} \quad I_p = \frac{\pi c^4}{2}$$

# Exemple 5.1:

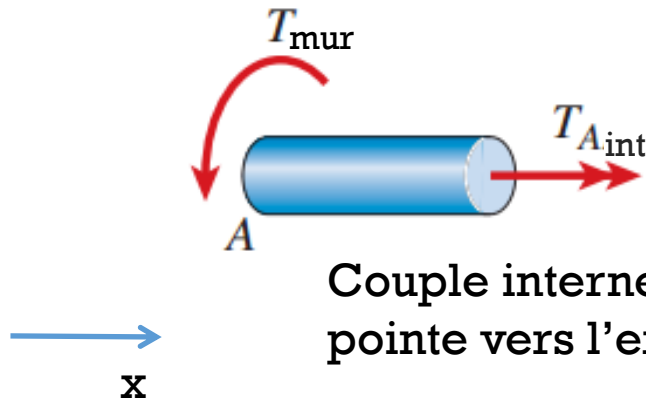
## Arbre composite



- L'équilibre demande:

$$\sum T_{\text{mur}} - 1200 \text{ Nm} + 400 \text{ Nm} = 0 \Rightarrow T_{\text{mur}} = 800 \text{ Nm (antihoraire)}$$

- Méthode de section sur segment A



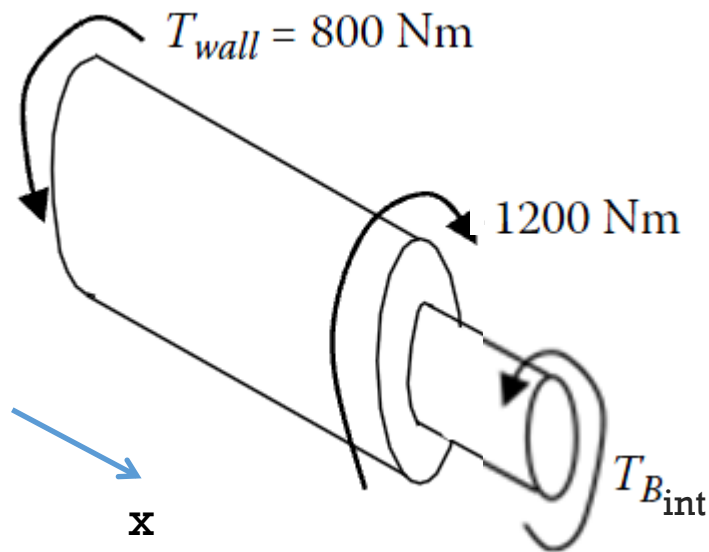
$$T_{\text{mur}} + T_{\text{Aint}} = 0 \Rightarrow T_{\text{Aint}} = -800 \text{ Nm}$$

$$\tau_{\text{max}A} = \frac{T_{\text{Aint}} c_A}{I_p A} = \frac{T_{\text{Aint}} c_A}{\frac{\pi}{2} c_A^4} = -63.7 \text{ MPa}$$

# Exemple 5.1

## Arbre composite

- Méthode des sections sur le segment B



Équation d'équilibre

$$800 - 1200 + T_{Bint} = 0$$

$$T_{Bint} = 400 \text{ Nm}$$

Couple interne

$$\tau_{\max}^B = \frac{T_B c_B}{I_{pB}} = \frac{T_B c_B}{\frac{\pi}{2} c_B^4} = 255 \text{ MPa}$$

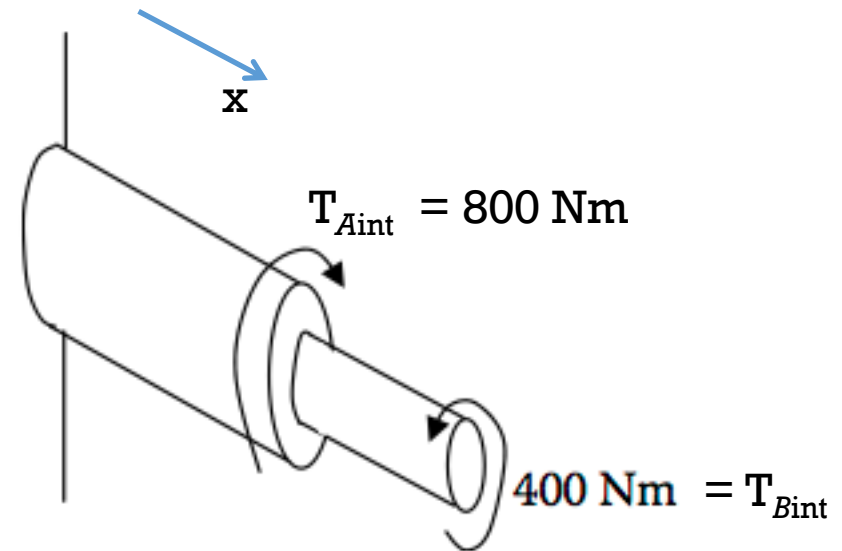
# Exemple 5.1:

## Arbre composite

- Angle de torsion:

$$\phi_A = \frac{T_A L_A}{I_{pA} G_A} = -0.0182 \text{ rad } (-1.04^\circ)$$

$$\phi_B = \frac{T_B L_B}{I_{pB} G_B} = 0.1091 \text{ rad } (6.25^\circ)$$

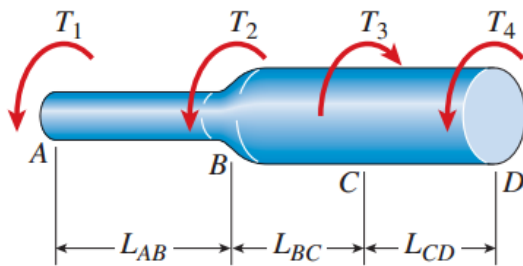


$$\varphi = \varphi_A + \varphi_B = -1.04^\circ + 6.25^\circ = 5.21^\circ \text{ (antihoraire)}$$

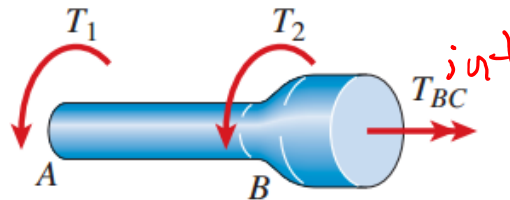
# Torsion non uniforme

## Barre avec des segments prismatiques avec couple / Torque constant

- Nous divisons la barre en segments d'une telle manière que chaque segment est prismatique et sujet à un couple constant



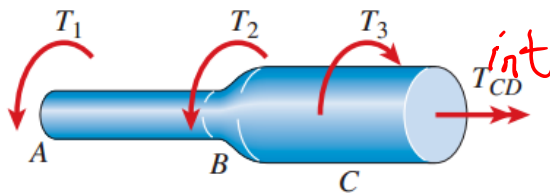
(a)



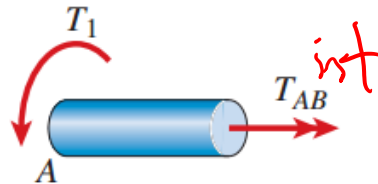
(c)



$$\phi_{\text{tot}} = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$$



(b)



$$\phi_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i (I_P)_i}$$

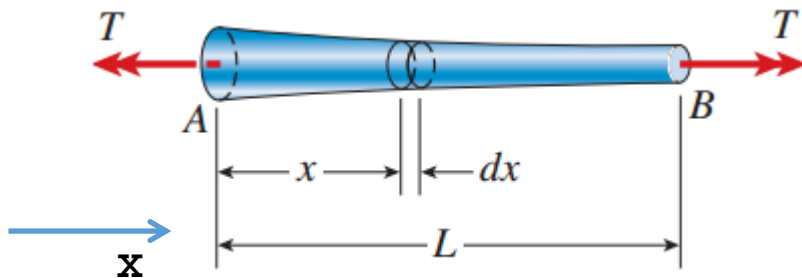
Détermination des couples internes pour chacun des segments

$$T_{CD} = -T_1 - T_2 + T_3 \quad T_{BC} = -T_1 - T_2 \quad T_{AB} = -T_1$$

# Torsion non uniforme

## Barre avec une section transversale variant de manière continue et un couple / torque constant

- Pour trouver l'angle de rotation, nous considérons une longueur  $dx$  à une distance  $x$  de l'une des extrémités de la barre
- L'angle de torsion pour la barre complète est une somme des angles de rotation microscopiques



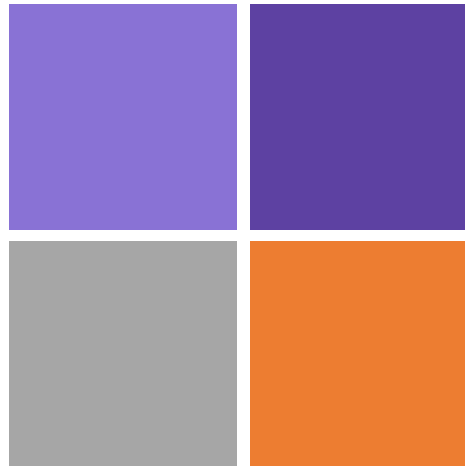
$$d\phi = \frac{T dx}{GI_P(x)}$$

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T dx}{GI_P(x)}$$

# Semaine 5

## Torsion partie III

45



### Partie I:

1. Introduction à la Torsion

### Partie II:

1. Loi de Hooke en Torsion
2. Contraintes et déformations relatives en torsion pour une barre circulaire

### Partie III:

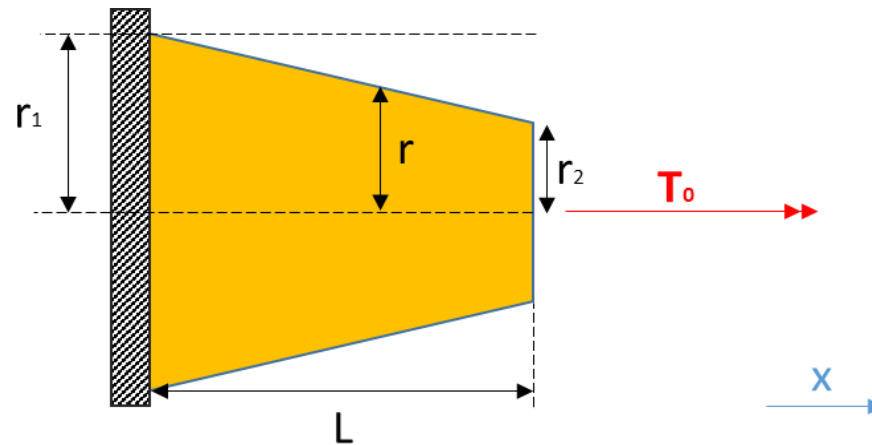
1. Torsion non uniforme
2. Puissance par un arbre de transmission
3. Torsion de barres non-circulaires
4. Énergie de déformation relative en torsion
5. Résumé

# Exemple 5.2

## Section transversale variable

- Une barre conique est fixée de manière rigide à son extrémité la plus grande. Elle est soumise à un couple  $T_0$  appliqué sur son extrémité libre.

**Donner une expression pour l'angle de torsion  $\phi$  à l'extrémité libre de la barre.**



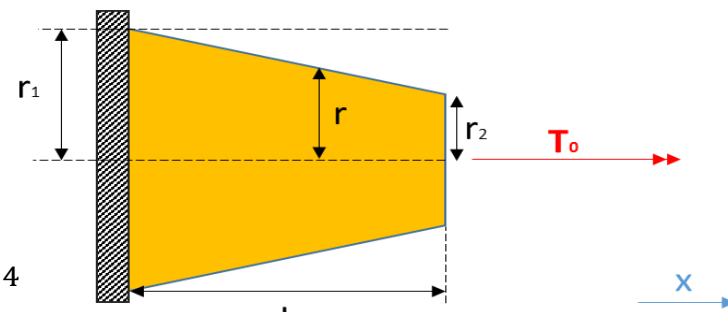
# Exemple 5.2

## Section transversale variable

- Donner une expression pour l'angle de torsion  $\phi$  à l'extrémité libre de la barre.

$$d\phi(x) = \frac{T_0}{I_p(x)G} dx \quad I_p = \pi c^4/2$$

$$c = r(x) = r_1 + (r_2 - r_1)x/L \quad I_p(x) = \frac{\pi}{2} \left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} x \right)^4$$



$$\phi = \int_0^L \frac{T_0}{I_p(x)G} dx = \int_0^L \frac{T_0}{\frac{\pi}{2} \left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} x \right)^4 G} dx = \frac{2T_0}{\pi G} \int_0^L \frac{1}{\left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} x \right)^4} dx$$

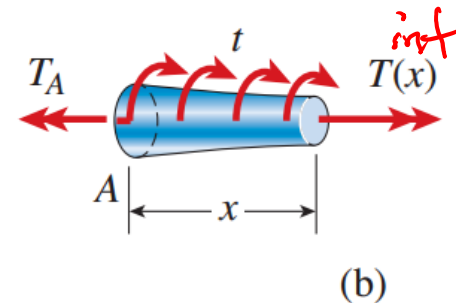
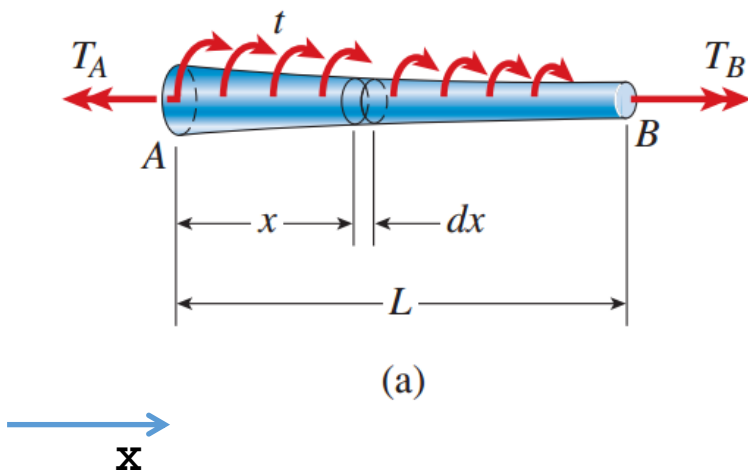
$$\phi = \frac{2T_0}{\pi G} \left[ \frac{-1}{\frac{3(r_2 - r_1)}{L} \left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} x \right)^3} \right]_0^L = \frac{2T_0 L}{3\pi G (r_2 - r_1)} \left( \frac{-1}{\left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} L \right)^3} - \frac{-1}{\left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} 0 \right)^3} \right)$$

$$\phi = \frac{2T_0 L}{3\pi G (r_2 - r_1)} \left( \frac{-1}{(r_2)^3} - \frac{-1}{(r_1)^3} \right) = \frac{2T_0 L}{3\pi G (r_1 - r_2)} \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right)$$

# Torsion non uniforme

## Barre avec une section transversale et un couple variant linéairement de façon continue

- Le couple interne  $T(x)$  varie de manière continue le long de l'axe  $x$
- Le couple interne peut être évalué en utilisant la méthode des sections et les équations d'équilibre



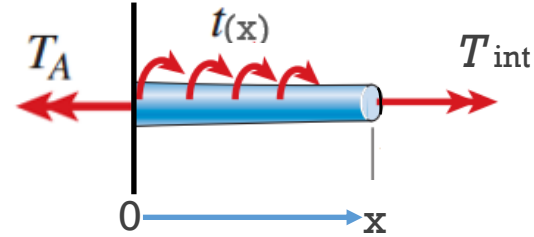
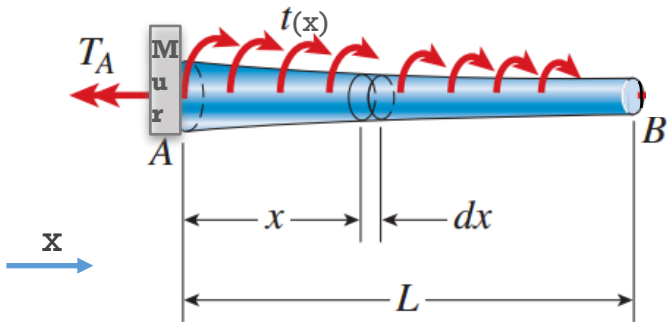
Couple /  
Torque  
interne

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T(x) dx}{GI_P(x)}$$

# Couple distribué

## Détermination du Couple interne I

- Méthode des sections en considérant la partie gauche de la barre



Equilibre du système

avec  $T_A = \int_0^L -t(x') dx'$

Equilibre du sous système (méthode des sections)

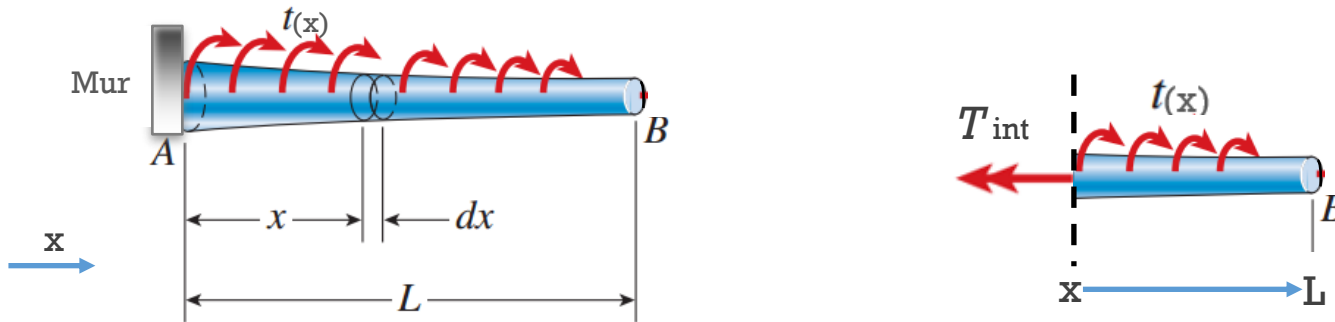
$$\int_0^x -t(x') dx' + T_{int}(x) - T_A = 0 \rightarrow T_{int}(x) = T_A - \int_0^x -t(x') dx'$$

$$T_{int}(x) = T_A + \int_0^x t(x') dx' = \int_0^L -t(x') dx' + \int_0^x t(x') dx'$$

# Couple distribué

## Détermination du Couple interne II

- Méthode des sections en considérant la partie droite de la barre



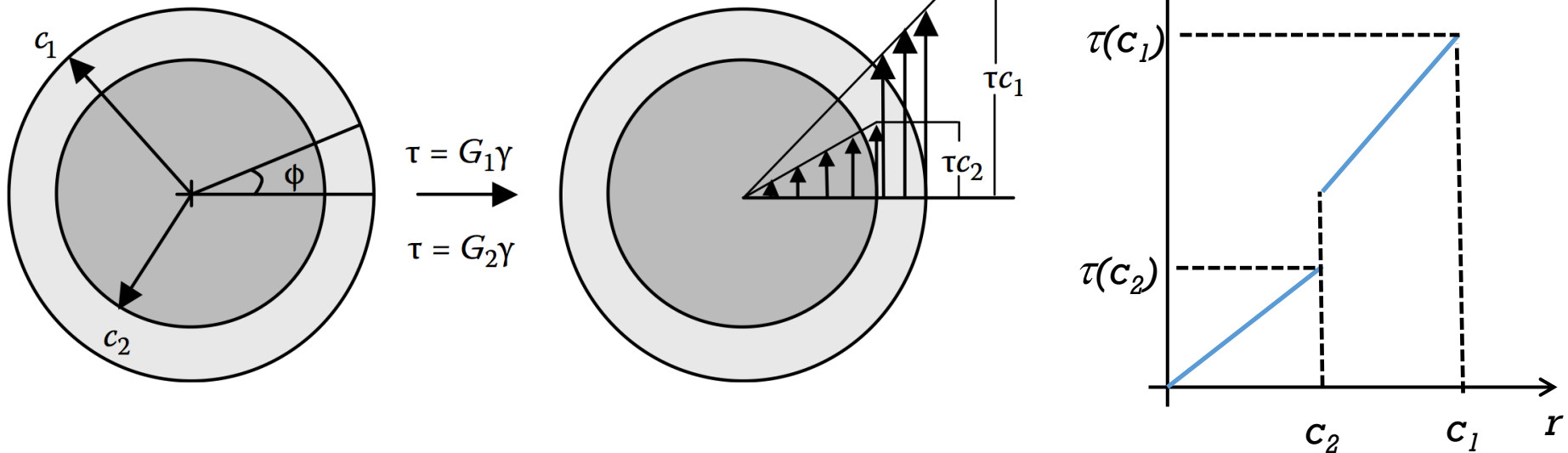
Equation d'équilibre

$$\int_x^L -t(x') dx' - T_{int} = 0 \rightarrow T_{int}(x) = \int_x^L -t(x') dx'$$

# Torsion non uniforme

## Loi de Hooke

- Si la barre consiste en un une structure noyau-enveloppe (core-shell), la déformation relative augmentera encore linéairement.
- Mais parce qu'il y a changement dans les propriétés des matériaux, la contrainte est discontinue.

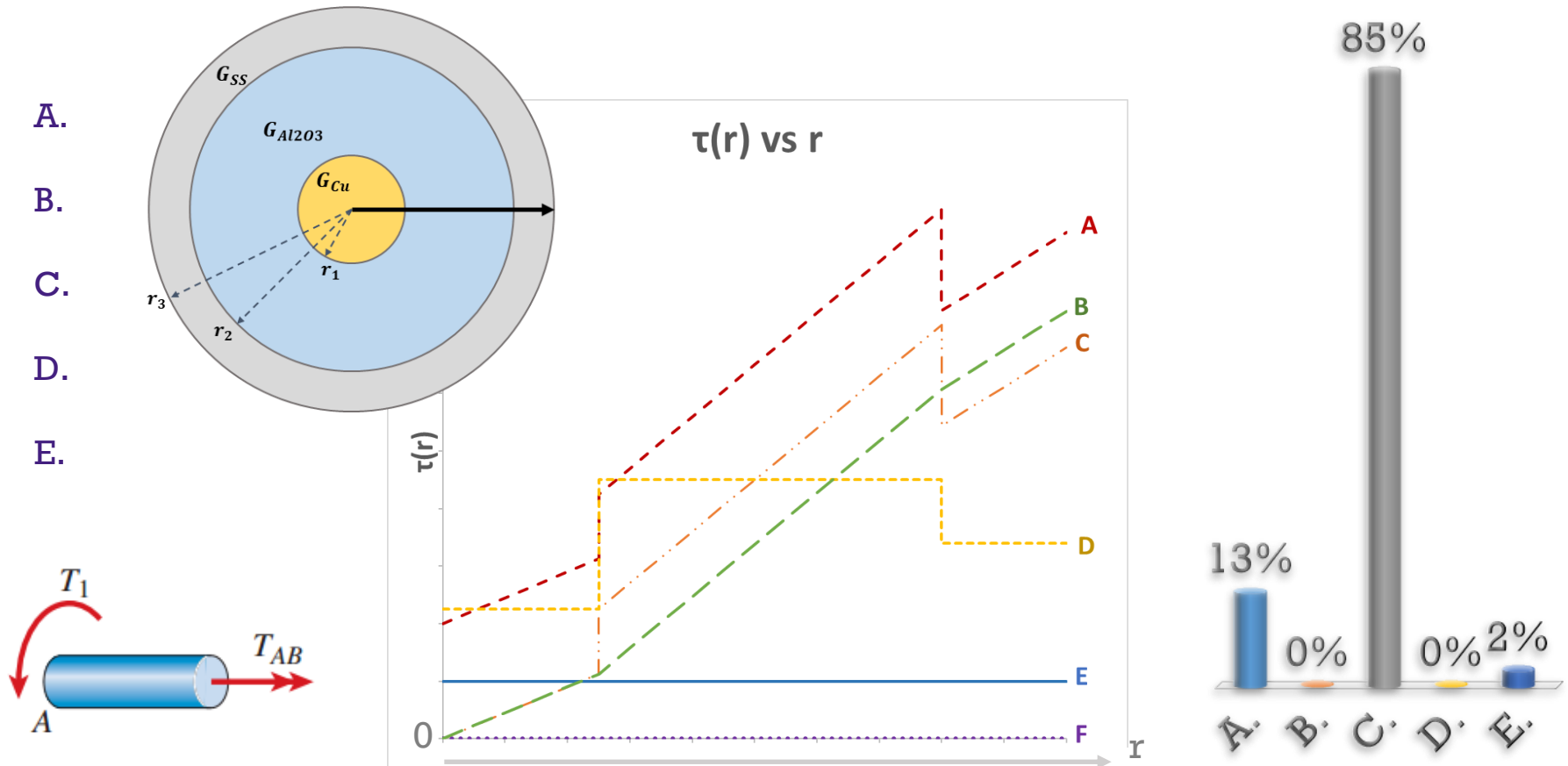


# Profil de la contrainte de cisaillement ?

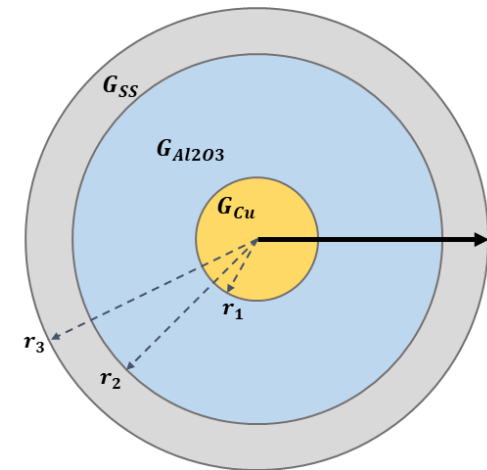
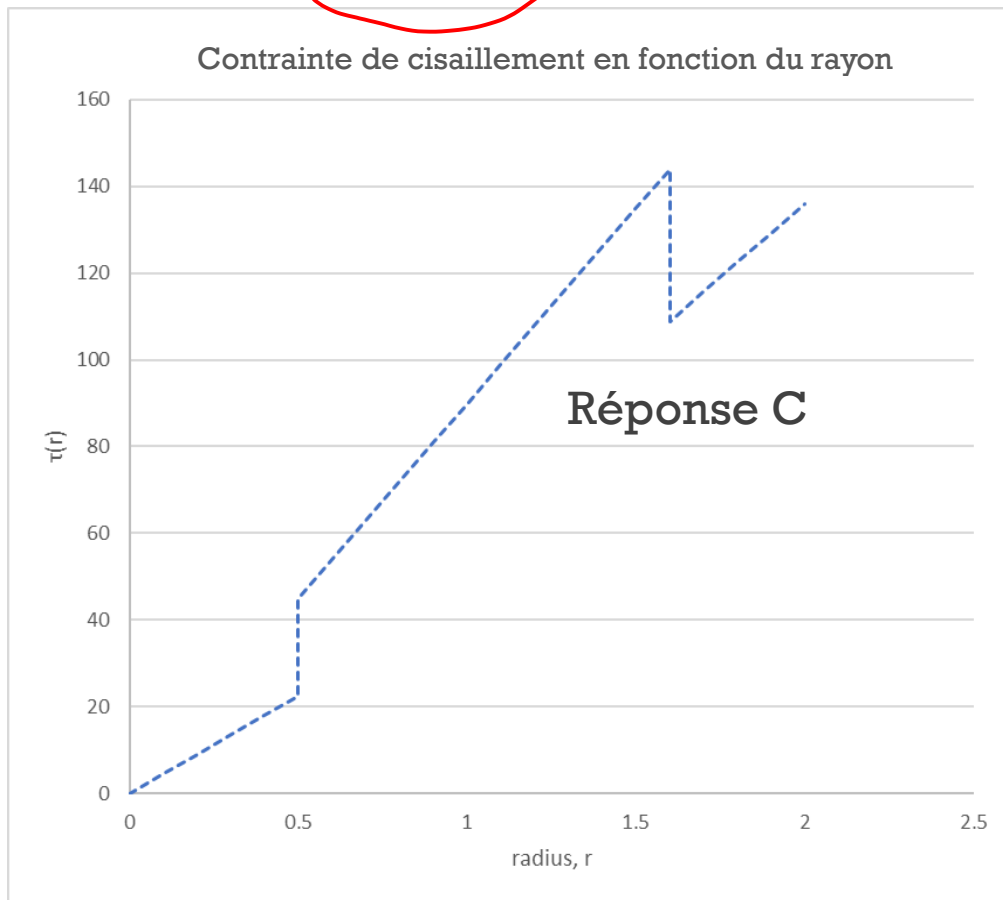
Couple appliqué sur une barre concentrique composée de 3 matériaux.

$$G_{Cu} = 45 \text{ GPa}, G_{Al2O3} = 90 \text{ GPa}, \text{ and } G_{SS} = 68 \text{ GPa}$$

**Quelle courbe représente le mieux  $\tau(r)$  vs  $r$  ?**



- Contrainte = 0 à  $r = 0$

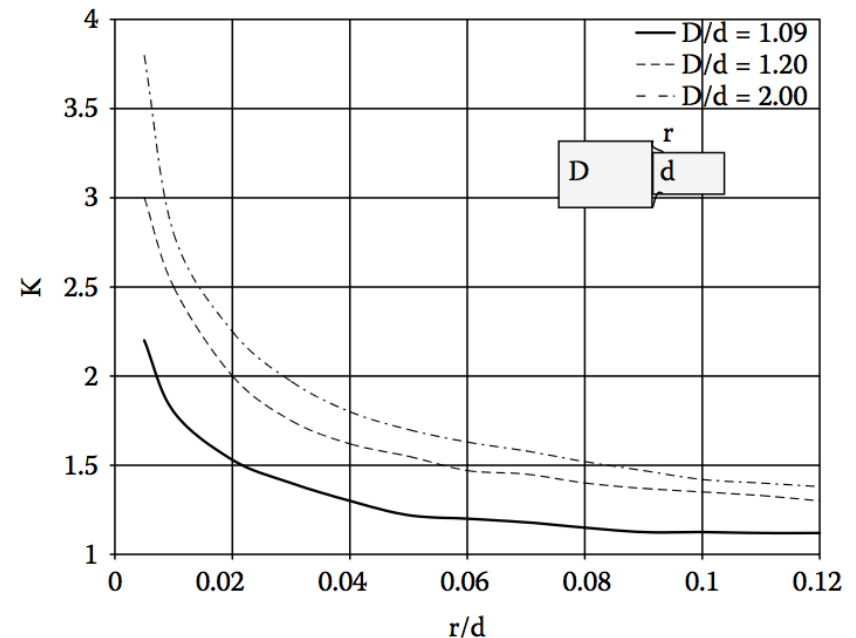


- Contrainte maximale dans chaque matériau à  $r_1, r_2, r_3$
- Pentes fonction du module de cisaillement
- Sauts pour les différents modules de cisaillement

# Concentration de contraintes en Torsion

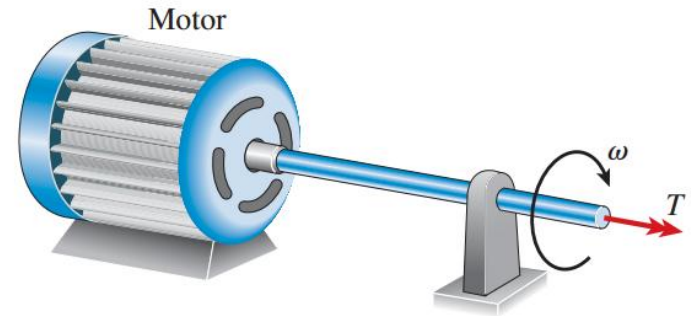
- Dans des arbres de transmission avec un changement abrupt de dimensions, des concentrations de contraintes peuvent survenir
- Comme pour la concentration de contraintes dans le domaine axial, nous pouvons utiliser un facteur pour estimer la concentration.
- La contrainte maximale de cisaillement en torsion peut être exprimée de la façon suivante:

$$\tau_{max} = K \cdot \frac{T c}{\underbrace{I_p}_{\text{de l'arbre plus petit}}}$$



- **Travail:** L'énergie développée par une force agissant sur une distance

- Distance linéaire:  $W = F \cdot \Delta x$
- Distance rotationnelle:  $W = T \cdot \Delta\theta$   
 $[\theta] = rad$



- **Puissance:** Travail effectué par unité de temps:

$$P = \frac{T\theta}{t} = \omega T \quad [\omega] = \frac{rad}{s} \quad [P] = \frac{Nm}{s} = W (Watt)$$

- Unité souvent utilisée: cheval vapeur (hp: horse power)

$$1hp = 33.000 \frac{ft \cdot lb}{min} = 550 \frac{ft \cdot lb}{s} = 6600 \frac{in \cdot lb}{s} = 745.7W$$

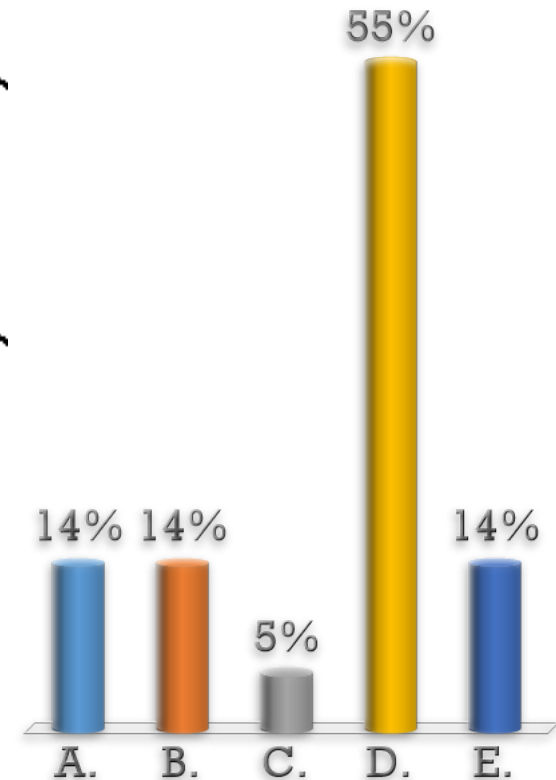
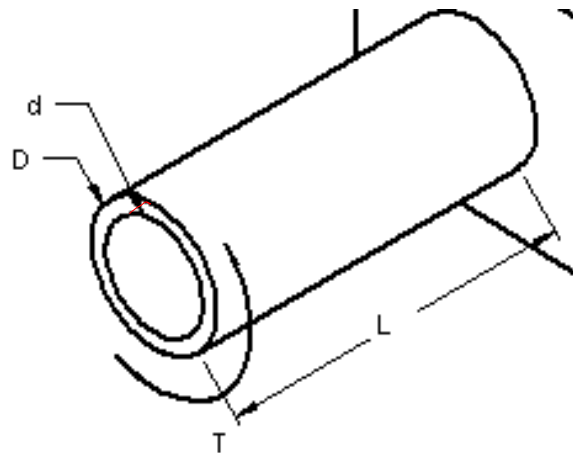
# Arbre de transmission

Arbre de transmission en acier creux,  $D = 40$  cm,  $d = 20$  cm,  $L = 40$  m.

$$G_{acier} = 77.2 \text{ GPa}, \tau_{yield} = 55.8 \text{ MPa}$$

**La vitesse de rotation maximale de l'arbre est de 165 tours par minute, quelle est la puissance maximale que peut transmettre cet arbre ?**

- A. 95.3 MWatts
- B. 12.7 MWatts
- C. 714.5 MWatts
- D. 11.4 Mwatts
- E. Aucune de ces réponses



# Arbre de transmission

## Arbre creux

$$P = \omega T = 2\pi f T$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = 165 \text{ rpm} * \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 2.75 \text{ Hz}$$

$$\tau_{\text{yield}} = \frac{Tc}{I_P} \Rightarrow T = \frac{\tau I_P}{c} \quad I_P = \frac{\pi}{2} (r_{\text{ext}}^4 - r_{\text{inn}}^4) \quad r_{\text{int}} = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 0.1 \text{ m} \quad r_{\text{ext}} = \frac{40 \text{ cm}}{2} = 0.2 \text{ m}$$

$$I_P = \frac{\pi}{2} (0.2^4 - 0.1^4) = 0.002356 \text{ m}^4$$

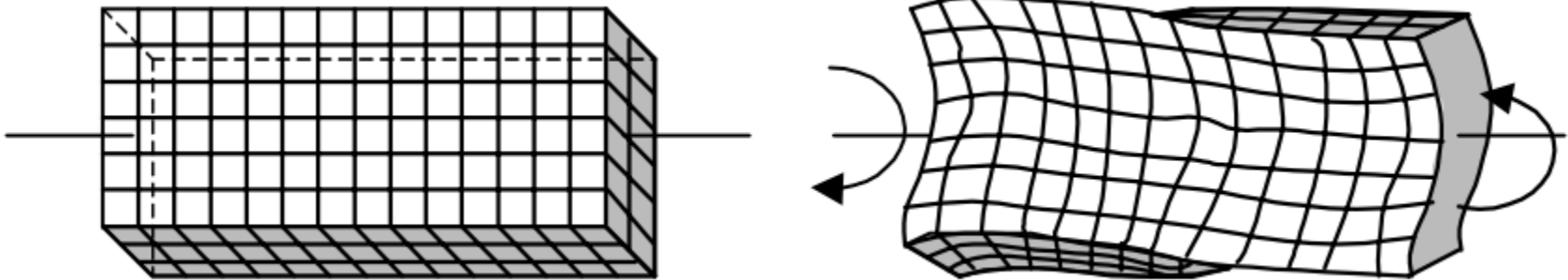
$$T = \frac{(55.8 * 10^6 \text{ N/m}^2) * 0.002356 \text{ m}^4}{0.2 \text{ m}} = 657\,324 \text{ N} * \text{m}$$

$$P = \omega T = 2\pi(2.75 \text{ Hz})(657\,324 \text{ N} * \text{m}) = 11\,908\,294 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 11.4 \text{ Megawatts}$$

# Torsion d'un corps non circulaire

## Barre rectangulaire

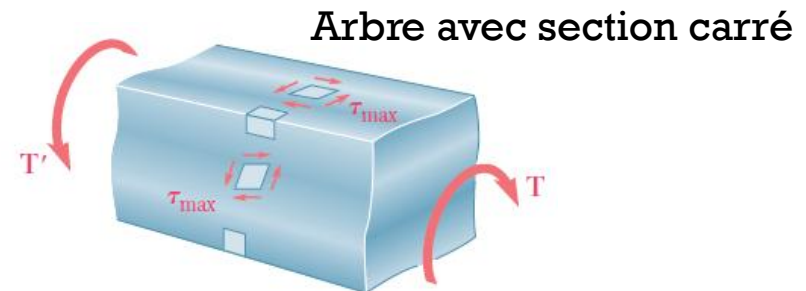
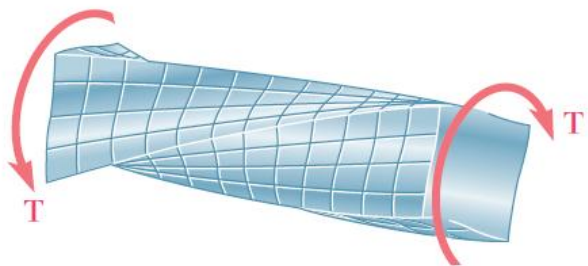
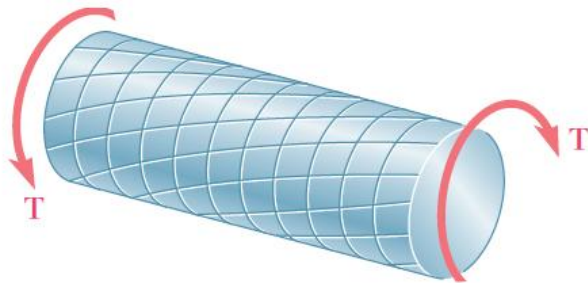
- Dans notre dérivation de la formule en torsion, pour la formule de torsion, nous avons assumé que les sections planes restent planes en torsion. Ceci est seulement vrai pour les corps avec une symétrie axiale infinie (comme les barres circulaires et les tubes).
- Dans une barre avec une section carré / rectangulaire, il n'y a pas de telle symétrie et les sections transversales vont se déformer.



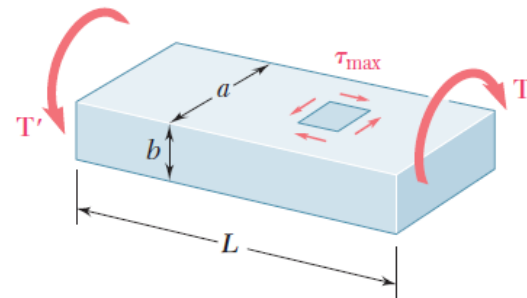
# Torsion d'un corps non circulaire

## Barre rectangulaire

- Il est faux d'assumer que la contrainte de cisaillement dans une barre rectangulaire varie linéairement avec la distance, la contrainte est en fait zéro dans les coins et non maximum



Contraintes de cisaillement maximales se situent au milieu des faces des arbres



Arbre avec section rectangulaire

# Torsion d'un corps non circulaire

## Barre rectangulaire

- Pour les barres rectangulaires de longueur  $L$  et côtés  $a$  &  $b$  ( $a > b$ ), les formules suivantes s'appliquent:

- Pour la contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{T}{C_1 a b^2}$$

- Pour l'angle de torsion:

$$\phi = \frac{TL}{C_2 a b^3 G}$$

- Et la rigidité en torsion:

$$k_t = \frac{T}{\phi} = C_2 a b^3 \frac{G}{L}$$

# Torsion d'un corps non circulaire

## Barre rectangulaire

$$\tau_{max} = \frac{T}{C_1 a b^2}$$

$$\phi = \frac{TL}{C_2 a b^3 G}$$

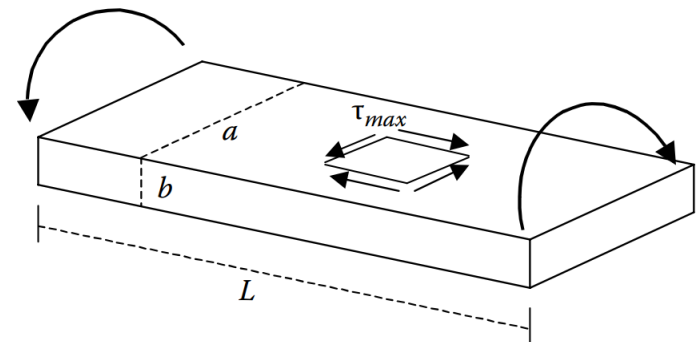
$$k_t = \frac{T}{\phi} = C_2 a b^3 \frac{G}{L}$$

- $C_1$  et  $C_2$  sont des coefficients qui dépendent seulement du ratio  $a/b$  comme montré dans ce tableau.

### Coefficients pour une barre rectangulaire

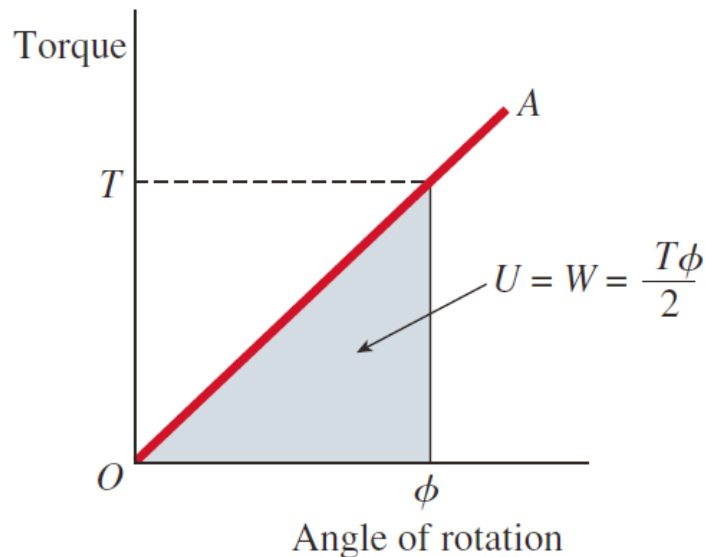
$a/b$	$c_1$	$c_2$
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
$\infty$	0.333	0.333

⇒ pour une section carré



# Énergie de déformation relative en Torsion

- De la conservation d'énergie: L'énergie de déformation relative d'une barre en Torsion est équivalente au travail effectué par la charge (en considérant qu'il n'y a pas d'énergie perdue ou gagnée sous forme de chaleur)



$$U = W = \frac{T\phi}{2} \quad \text{Joules}$$

$$U = \frac{T^2 L}{2GI_P}$$

$$U = \frac{GI_P \phi^2}{2L}$$

- La déformation relative  $\gamma(r)$  et la contrainte  $\tau(r)$  de cisaillement varient linéairement de 0 à  $r = 0$  to  $\gamma_{max}$  et  $\tau_{max}$ , respectivement, sur le bord extérieur de la section de la barre

Déformation relative

$$\gamma(r) = \frac{r}{c} \gamma_{max}$$

Contrainte de cisaillement

$$\tau(r) = G \frac{r}{c} \gamma_{max} = \frac{r}{c} \tau_{max}$$

Angle de torsion

$$\phi = \frac{TL}{GI_p}$$

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

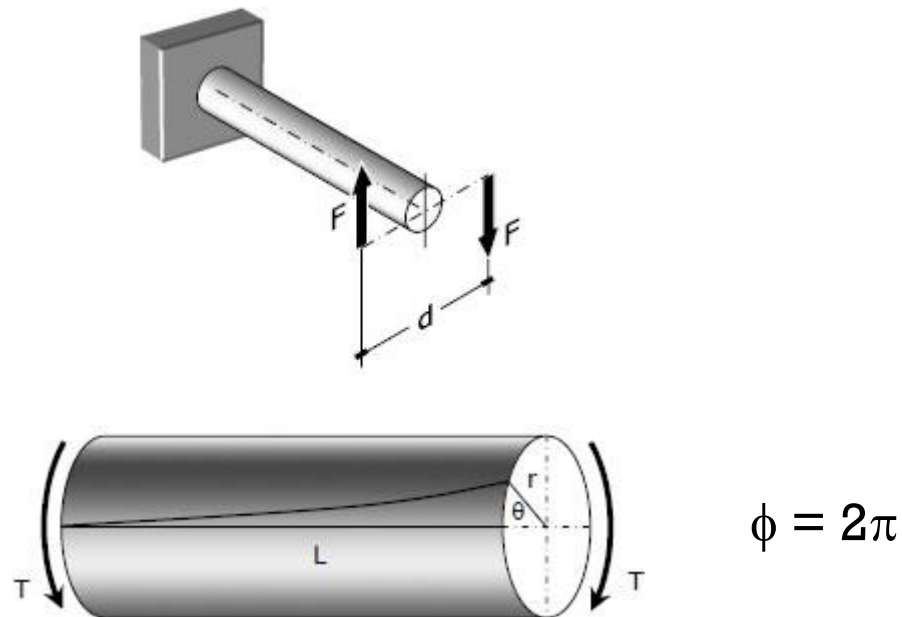
$$\tau_{max} = \frac{Tc}{I_p}$$
$$\tau(r) = \frac{Tr}{I_p}$$

Rigidité en torsion  $k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{GI_p}{L}$

# Exemple 5.3

## Torsion d'un fil

- Quelle doit être la longueur d'un fil d'aluminium de 6 mm de diamètre ( $G = 27 \text{ GPa}$ ) pour qu'il puisse effectuer une révolution complète sans excéder une contrainte de cisaillement de 42 MPa ?

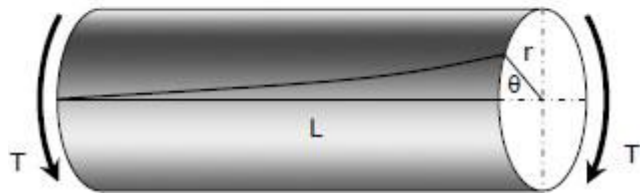
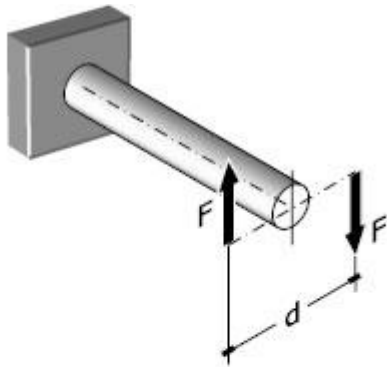


**! Les unités de l'angle de torsion sont des Radians !**

# Exemple 5.3

## Torsion d'un fil

- Quelle doit être la longueur d'un fil d'aluminium de 6 mm de diamètre ( $G = 27 \text{ GPa}$ ) pour qu'elle puisse effectuer une révolution complète sans excéder une contrainte de cisaillement de 42 MPa ?



$$\phi = 2\pi$$

Formules d'intérêt:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{I_p}$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_p}$$

$$T = \frac{\tau_{max} I_p}{c}$$

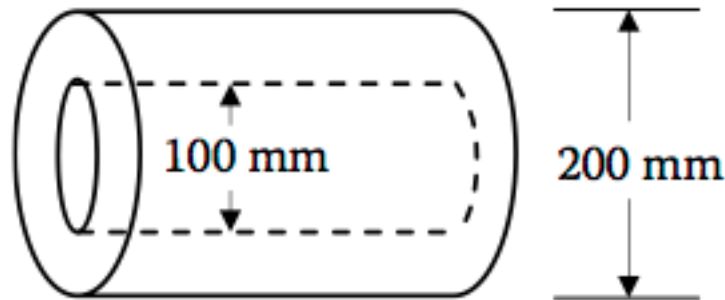
$$\phi = \frac{\tau_{max} I_p L}{cGI_p}$$

$$L = \frac{cG\phi}{\tau_{max}} = \frac{3 \times 10^{-3} \times 27 \times 10^9 * 2\pi}{42 \times 10^6} = 12.12 \text{ m}$$

# Exemple 5.4

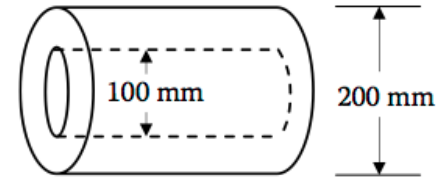
## Arbre creux

- Nous extrayons un élément de 100 mm de diamètre d'un arbre circulaire plein d'un diameter de 200 mm. Quel pourcentage de la résistance à la torsion de l'arbre est perdu suivant cette operation ?



# Exemple 5.4

## Arbre creux



- Nous extrayons un élément de 100 mm de diamètre d'un arbre circulaire plein d'un diameter de 200 mm. Quel pourcentage de la résistance à la torsion de l'arbre est perdu suivant cette operation ?

La contrainte de cisaillement maximale est la même pour l'arbre plein et creux et égale à la contrainte limite d'élasticité de cisaillement.

$$\tau_{max1,2} = \tau_{yield}$$

Arbre plein

Arbre creux

$$\tau_{max} = \tau_{yield} = \frac{T_1 c}{I_{p1}}$$

$$\tau_{yield} = \frac{T_2 c}{I_{p2}}$$

$$\frac{T_1 c}{I_{p1}} = \frac{T_2 c}{I_{p2}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{I_{p2}}{I_{p1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{15\pi c^4}{32}}{\frac{\pi c^4}{2}} = 0.9375, \text{ donc}$$

**6,25% en moins de résistance**

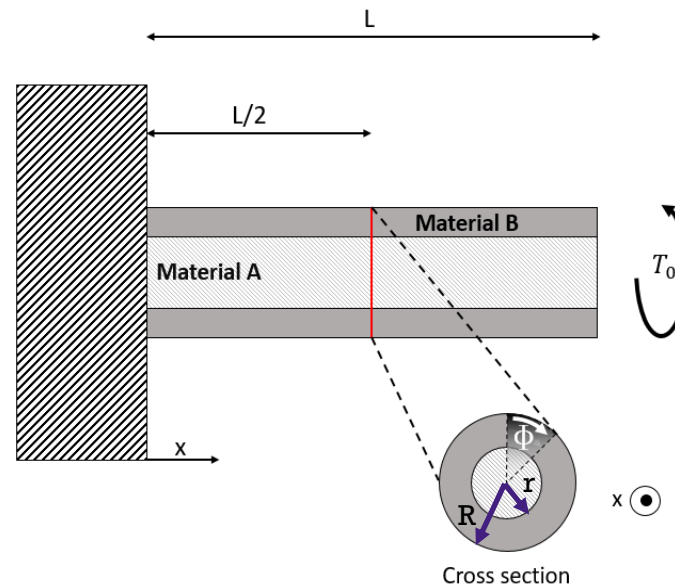
$$\text{avec } I_{p1} = \frac{\pi c^4}{2} \quad I_{p2} = \frac{\pi c^4}{2} - \frac{\pi b^4}{2} \quad \text{et } b = c/2 \Rightarrow I_{p2} = \frac{15\pi c^4}{32}$$



# Example 5.5

## Torsion d'une barre composite

- Etablir les formules pour les moments quadratiques de torsion,  $I_P$ , pour le matériau A et le matériau B.
- Déterminer la déformation relative de cisaillement à  $x = \frac{L}{2}$  en fonction de la distance au centre,  $\rho$ ,  $\phi_0$  and  $L$ .
- Où et quelle est la valeur de la déformation relative de cisaillement maximale dans chaque matériau à  $x = \frac{L}{2}$  ?
- Où et quelle est la valeur de la contrainte de cisaillement maximale dans chaque matériau à  $x = \frac{L}{2}$  ?



# Example 5.5

## Torsion d'une barre composite

- Etablir les formules pour le moment quadratique de torsion,  $I_p$ , de la barre complète.
- Déterminer la déformation relative de cisaillement à  $x = \frac{L}{2}$  en fonction de la distance au centre,  $\rho$ ,  $\phi_0$  and  $L$ .

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \rho^4}{2}$$

$I_p$  dépend de la géométrie, pas du matériau

$$\gamma_\rho = \frac{\tau_\rho}{G_x} \quad \tau_\rho = T_i * \frac{\rho}{I_{pi}} \quad T_0 \text{ est inconnu}$$

$$T_i = k_i \Phi_0 = \frac{2I_{pi}}{L} G_i \Phi_0 \quad \text{avec } k_i = \frac{2I_{pi}}{L} G_i$$

$$\tau_\rho = \frac{2I_{pi}}{L} G_i \Phi_0 * \frac{\rho}{I_{pi}} = \frac{2\rho}{L} G_i \Phi_0$$

$$\gamma_\rho = \frac{\tau_\rho}{G_i} = \frac{2\rho}{L} \Phi_0$$

# Example 5.5

## Torsion d'une barre composite

- Où et quelle est la valeur de la déformation relative de cisaillement maximale dans chaque matériau à  $x = \frac{L}{2}$  ?

$$\tau_\rho = \frac{2\rho}{L} G_x \Phi_0$$

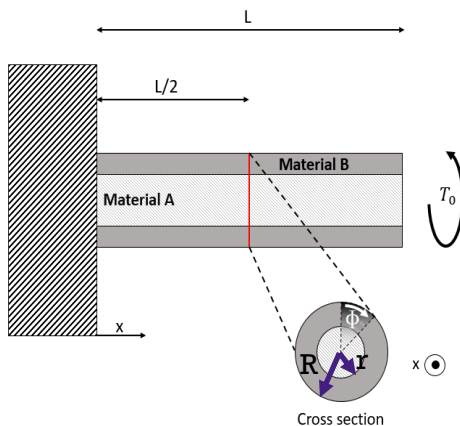
$$\gamma_\rho = \frac{\tau_\rho}{G_i} = \frac{2\rho}{L} \Phi_0$$

$\gamma_{\max_A}$  est située à l'interface entre A et B, rayon  $r$

$$\gamma_{\max_A} = \frac{\tau_\rho(r)}{G_A} = \frac{2r}{L} \Phi_0 = \mathbf{0.006}$$

$\gamma_{\max_B}$  est située à l'extrémité extérieure du cylindre, rayon  $R$

$$\gamma_{\max_B} = \frac{\tau_\rho(R)}{G_B} = \frac{2R}{L} \Phi_0 = \mathbf{0.01}$$



# Example 5.5

## Torsion d'une barre composite

- Où et quelle est la valeur de la contrainte de cisaillement maximale dans chaque matériau à  $x = \frac{L}{2}$  ?

$$\tau_\rho = \frac{2\rho}{L} G_x \Phi_0$$

$\tau_{\max_A}$  est située à l'interface entre A et B, rayon  $r$

$$G_A = \frac{E_A}{2(1 + \nu_A)} = 0.5 \text{ GPa}$$

$$\tau_{\max_A} = \frac{2r}{L} G_A \Phi_0 = \mathbf{3 \text{ MPa}}$$

$$G_B = \frac{E_B}{2(1 + \nu_B)} = 1 \text{ GPa}$$

$\tau_{\max_B}$  est située à l'extrémité extérieure du cylindre, rayon  $R$

$$\tau_{\max_b} = \frac{2R}{L} G_B \Phi_0 = \mathbf{10 \text{ MPa}}$$

